Licence 3 de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Equations différentielles, Fiche 1

Outils de topologie et type d'équation différentielle.

Exercice 1 (Théorème de point fixe contractant dans un espace complet)

Dans cet exercice, nous allons montrer les deux résultats suivants.

Théorème du point fixe contractant dans un complet *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé complet. Soit* $\Phi : E \longrightarrow E$ *telle que* $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \forall x, y \in E$, *où* $k \in [0, 1[$ *(*Φ *est contractante). Alors il existe un unique point fixe pour* Φ*, c'est-à-dire qu'il existe un et un seul* $x \in E$ *tel que* $\Phi(x) = x$*. De plus la suite d'itérés* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $x_0 \in E$ *et* $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *converge dans* E *vers le point fixe* x*.*

Corollaire, Point fixe itérée contractante dans un complet *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé complet. Soit* $\Phi : E \longrightarrow E$ *telle qu'il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *telle que l'itérée* Φ^p *soit contractante :* $\|\Phi^p(x) - \Phi^p(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \forall x, y \in E$, *où* $k \in [0, 1[$*. Alors il existe un unique point fixe pour* Φ*, c'est-à-dire qu'il existe un et un seul* $x \in E$ *tel que* $\Phi(x) = x$*.*

1) Rappeler ce qu'est un espace normé complet.

2) Montrer l'unicité du point fixe pour le théorème.

3) Soit $x_0 \in E$ quelconque et soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = \Phi(x_n)$,$\forall n \in \mathbb{N}$
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|.$$

b) En déduire que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p > q$,

$$\|x_p - x_q\| \leq k^q \frac{1}{1-k} \|x_1 - x_0\|.$$

c) En déduire que $(x_p)_p$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$ et que la limite est un point fixe pour Φ.

4) Montrer le corollaire.

Exercice 2 (Espace complet)

Montrer que $E = C([a, b], \mathbb{K}^N)$ munit de la norme $\|y\|_E = \sup\limits_{t\in[a,b]} \|y(t)\|$ est complet.

Exercice 3 (Type d'équation)

Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires ou non linéaires, avec condition initiale ou de bord

$$a)\ y'' + 4y' + 3y^2 = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1,$$

$$b)\ y'' + 2yy' = 0, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 0,$$

$$c)\ y'' - y' + \cos(y) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(1) = 2,$$

$$d)\ y'' + ty' + y = te^t, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

Exercice 4 (Mise sous la forme $Y' = f(t, Y)$)

Mettre les équations différentielles suivantes sous la forme d'une équation différentielle $Y' = f(t, Y)$

$$a)\ y'' + (y')^2 = \cos t, \qquad b)\ y'' + 4ty' + 2y = 0,$$

$$c)\ y^{(3)} - y' + 2y'y^2 = 0, \qquad d)\ t^2y' - y\cos t + y'' = 1,$$

$$e) \left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & 2y_1 + ty_2, \\ y_2' & = & y_1 - y_2, \end{array} \right. \qquad f) \left\{ \begin{array}{lcl} y_1'' & = & y_1 + ty_2', \\ y_2'' & = & y_1y_2 - y_1'y_2'. \end{array} \right.$$