Licence 3 de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Equations différentielles, Fiche 11

Etudes qualitatives.

Exercice 1 (Equation logistique)

Soit l'équation différentielle $n'(t) = rn(t) - bn(t)^2$ avec r, b des constantes strictement positives que l'on considère pour $t \geq 0$.
1) Dessiner la fonction $f(n) = rn - bn^2$ sur $\mathbb{R}$.
2) Soit n une solution maximale définie sur $I = [0, \alpha[$ avec une condition initiale $n(0) = n_0 \geq 0$. Sans calculer l'expression des solutions, montrer les propriétés suivantes :
a) Si $n_0 > 0$, alors $n(t) > 0$ pour tout $t \in I$.
b) Si $n_0 < r/b$, alors $n(t) < r/b$ pour tout $t \in I$.
c) Si $n_0 > r/b$, alors $n(t) > r/b$ pour tout $t \in I$.
d) $\alpha = +\infty$.
e) Si $n_0 > 0$, alors $\lim_{t \to +\infty} n(t) = \frac{r}{b}$.
f) Donner l'allure des solutions.
3) Calculer les solutions.

Exercice 2 (Autour de l'équation de Lotka-Volterra)

Nous continuons l'étude faite en cours sur le système

$$\begin{cases} p'(t) &= ap(t) - bp(t)r(t), \\ r'(t) &= -cr(t) + dp(t)r(t). \end{cases} \tag{1}$$

1) Calculer la moyenne sur une période de p et r.

2) On rajoute un prédateur pour les deux espèces (par exemple la pêche). Alors le système devient

$$\begin{cases} p'(t) &= ap(t) - bp(t)r(t) - k_1 p(t), \\ r'(t) &= -cr(t) + dp(t)r(t) - k_2 r(t), \end{cases} \tag{2}$$

avec k_1, k_2 des constantes positives. Calculer les nouvelles moyennes sur une période. Que peut-on en déduire ?

3) Pour le système (1), on pose $dp(t) = c + \rho\cos\theta$ et $br(t) = a + \rho\sin\theta$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par (ρ, θ). A partir de l'expression de $\theta'(t)$, donner une expression de la période des solutions de (1).

Exercice 3 (Equilibre limite)

Soit l'équation différentielle $n'(t) = F(m - n(t)) - n(t)$ avec $m > 0$, $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ croissante, de classe C^1 telle que $F(0) = 0$ et une condition initiale $n(0) = n_0$. Supposons que $0 \leq n_0 \leq m$

1) Montrer que la solution maximale n est définie pour tout $t \geq 0$ et que $0 \leq n(t) \leq m$ pour tout $t \geq 0$.

2) Posons $\Delta(t) = n(t) - F(m - n(t))$.

a) Dans le cas où $F(m - n_0) = n_0$, que peut-on dire sur $\Delta(t)$?

b) Supposons maintenant que $n_0 < F(m - n_0)$. Posons $\Phi(t) = (\Delta_+(t))^2$. Montrer que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$\Phi'(t) = -2\Phi(t)(1 + F'(m - n(t))).$$

En déduire que $n(t) < F(m - n(t))$ pour tout $t \geq 0$ et que n est croissante. Conclure que n a une limite quand $t \to +\infty$.

3) On suppose toujours l'hypothèse $n_0 < F(m - n_0)$. Montrer que $n(t) = n_0 e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} F(m - n(s))\, ds$ et en déduire que

$$0 \leq F(m - n(t)) - n(t) \leq \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}(n(t) - n_0).$$

Quelle équation vérifie la limite de n en $+\infty$?