Licence 3 de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Equations différentielles, Fiche 12

Entonnoirs. Méthode des caractéristiques.

Exercice 1 (Utilisation d'entonnoirs et d'anti-entonnoirs)

Soit l'équation différentielle $y' = y^2 - t$ avec $t \geq 0$. On cherche à déterminer le comportement des solutions en utilisant des entonnoirs et des anti-entonnoirs.
1) a) Montrer que $t \mapsto -\sqrt{t}$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ déterminent un entonnoir strict E de $y' = y^2 - t$ pour $t > 0$.
b) En déduire que toutes les solutions maximales y de $y' = y^2 - t$ telle que $y(0) = y_0$ pour lesquelles il existe $t_1 > 0$ tel que $(t_1, y(t_1)) \in E$ sont définies pour tout $t \geq 0$ et restent dans l'entonnoir E pour $t \geq t_1$.
2) a) Montrer que $t \mapsto -\sqrt{t}$ et $t \mapsto -\sqrt{t-1}$ déterminent un entonnoir strict E' de $y' = y^2 - t$ pour $t > 5/4$.
b) En déduire que les solutions maximales y de $y' = y^2 - t$ telle que $y(0) = y_0$ pour lesquelles il existe $t_1 > 5/4$ tel que $(t_1, y(t_1)) \in E'$ sont définies pour tout $t \geq 0$, restent dans l'entonnoir E' pour $t \geq t_1$ et sont équivalentes à l'infini à $-\sqrt{t}$.
3) Montrer que les solutions maximales y de $y' = y^2 - t$ telle que $y(0) = y_0$ pour lesquelles il existe $t_1 > 0$ tel que $(t_1, y(t_1)) \in E$ sont équivalentes à l'infini à $-\sqrt{t}$.
4) Montrer que $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto \sqrt{t+1}$ déterminent un anti-entonnoir strict A de $y' = y^2 - t$ pour $t > 0$.
5) Soit $t_0 > 0$. Montrer qu'il existe $y^* \in \mathbb{R}$ tel que
a) la solution maximale y de $y' = y^2 - t$ telle que $y(t_0) = y^*$ est définie pour tout $t \geq t_0$ et reste dans l'anti-entonnoir A,
b) les solutions maximales y de $y' = y^2 - t$ telle que $y(t_0) = y_0$ avec $y_0 < y^*$ sont définies pour tout $t \geq t_0$ et vérifient $y(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -\sqrt{t}$,
c) les solutions maximales y de $y' = y^2 - t$ telle que $y(t_0) = y_0$ avec $y_0 > y^*$ sont définies sur $[t_0, a[$ avec $a < +\infty$ et $y(t) \underset{t \to a}{\to} +\infty$.

Exercice 2 (Méthode des caractéristiques, Vitesse de transport constante)

1) Résoudre $\partial_t u(t,x) + 2\partial_x u(t,x) = 0$ avec la condition $u(0,x) = x^2$.

2) Résoudre $\partial_t u(t,x) - 2\partial_x u(t,x) = tx$ avec la condition $u(0,x) = e^x$.

3) Résoudre $\partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = u(t,x)$ avec la condition $u(0,x) = x^3$.

Exercice 3 (Méthode des caractéristiques, Vitesse de transport variable)

1) Résoudre $\partial_t u(t,x) + (t+x)\partial_x u(t,x) = 0$ avec la condition $u(0,x) = u^0(x)$.

2) Résoudre $t\partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = 0$ avec la condition $u(t,0) = t^2$.

3) Résoudre $\partial_t u(t,x) + (\frac{2}{x} + 1)\partial_x u(t,x) = 0$ pour $x > 0$ avec la condition $u(0,x) = u^0(x)$ pour $x > 0$. Quelles constatations peut-on faire sur cet exemple ?