Licence 3 de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Equations différentielles, Fiche 6

Exemples d'équations différentielles non-linéaires.

Exercice 1 (Non-unicité)

Soit l'équation différentielle $y' = 3y^{2/3}$. Nous allons donner plusieurs prolongements sur $\mathbb{R}$ de la solution $y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $y(t) = t^3$.

1) Vérifier que sur $\mathbb{R}$ $\tilde{y}(t) = t^3$ convient.

2) Posons pour $K < 0$, la fonction $y_K(t) = \begin{cases} (t-K)^3 & \text{si } t \leq K \\ 0 & \text{si } K < t < 0 \\ t^3 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$. Montrer que y_K est dérivable en tout point et calculer sa dérivée.

3) Conclure.

Exercice 2 (Application des théorèmes d'existence)

Prouver l'existence et l'unicité avec une condition initiale en $t = 0$ (préciser la forme de la condition initiale) des solutions maximales de

1) $y' = \cos y$,

2) $y'y + y'' + y^2 = 0$,

3) $\begin{cases} x' = y^2, \\ y' = txy, \end{cases}$

4) $y' = |y - t|$.

Exercice 3 (Cauchy-Lipschitz, cadre C^1)

Etudier les différentes équations différentielles suivantes. On s'intéressera à a) l'existence/unicité de solutions maximales, b) l'expression éventuelle de ces solutions.

1) $y' = y^2$ avec la condition initiale $y(2) = -1/2$.

2) $y' = 1/y$, avec la condition initiale $y(0) = 1$.

3) $y' = 1 + y^2$ avec la condition initiale $y(1) = 1$.

Exercice 4 (Equations à variables séparées et homogènes)

Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $y' = t\sqrt{y}$.

2) $t^2y' - ty - y^2 = 0$.