

TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE À TRAVERS LES CATÉGORIES

Résumé

Après des considérations très générales sur la théorie des catégories, nous nous intéresserons à une branche plus spécifique des mathématiques où les catégories entrent en jeu : la topologie algébrique. En effet, l'étude des surfaces de dimension finie, qui se ramène à trouver des invariants par homéomorphisme, peut se faire par un outil appelé l'*homologie*, et dont certains résultats utilisent des notions catégoriques. On va alors donner des énoncés parfois très abstraits, mais dont une reformulation équivalente permettra de faire des calculs concrets, notamment des calculs sur des surfaces élémentaires comme la sphère ou le tore de \mathbb{R}^3 .

Tous nos remerciements vont bien sûr à notre tuteur, M. Cazanave, qui a su nous guider tout au long de la rédaction, et partager l'intérêt et le goût pour ce domaine d'étude.

Sommaire

	Page
1 Introduction	2
2 Catégories	3
2.1 Catégories	3
2.2 Foncteurs	5
2.3 Problèmes universels	6
3 Exemples d'espaces topologiques	8
3.1 Simplexes	8
3.2 Topologie quotient	9
3.3 Espaces définis par recollement	10
4 Homologie	11
4.1 Δ -complexes	11
4.2 Homologie simpliciale	12
4.3 Homologie singulière	16
4.3.1 Définitions et premières propriétés	16
4.3.2 Invariance par homotopie	20
4.4 Homologie relative	20
5 Application : suite de Mayer-Vietoris	23
5.1 Définition	23
5.2 Calcul de groupes d'homologie	24
5.2.1 Retour sur l'homologie de S^2	24
5.2.2 Homologie du tore	24
Annexes	27

1 Introduction

Étant donné le nombre et la diversité des espaces topologiques, on est amené à vouloir les classer, et à les distinguer entre eux. On peut par exemple les identifier à homéomorphisme près, mais cette distinction est parfois difficile à établir en pratique.

Une première idée, intuitive et moins restrictive, est de classer les espaces selon leur « forme » ; c'est ce qui motive à introduire la notion d'homotopie et notamment d'équivalence d'homotopie. On dit que deux espaces topologiques X et Y sont **homotopiquement équivalents** s'il existe deux applications continues $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que $g \circ f$ est homotope à 1_X et $f \circ g$ est homotope à 1_Y . On a donc que deux espaces topologiques homéomorphes sont homotopiquement équivalents, et cette condition n'est qu'une condition nécessaire. En effet, on peut remarquer qu'un cercle est homotopiquement équivalent à \mathbf{C}^* , *i.e.* un plan privé d'un point, cependant ils ne sont pas homéomorphes puisque le cercle privé de deux points n'est pas connexe tandis que le plan privé de trois points l'est.

Plus généralement, on va chercher à associer à chaque espace topologique un objet algébrique, un *invariant* algébrique, qui sera préservé par homéomorphisme, c'est-à-dire des conditions nécessaires pour que deux espaces soient homéomorphes. Mais, pour étudier aussi les transformations entre les espaces topologiques eux-mêmes, on construit alors ces invariants de sorte que les applications continues entre espaces topologiques soient également préservées. Et, c'est ici que la théorie des catégories intervient. En effet, on regroupe les espaces topologiques munis des applications continues dans une même structure, c'est ce qu'on appelle la *catégorie des espaces topologiques*; et on définit l'invariant comme étant un *foncteur* entre cette dernière catégorie et une autre catégorie \mathcal{C} donnée, *i.e.* une application qui à chaque espace topologique associe un objet de \mathcal{C} , et qui associe à chaque application continue un morphisme dans \mathcal{C} .

Un premier exemple d'invariant est le groupe fondamental; c'est un foncteur à valeurs dans la catégorie des groupes. Pour un espace topologique X donné, l'étude du groupe fondamental permet d'obtenir certains résultats sur l'espace lui-même, par exemple s'il est simplement connexe ou s'il est contractile. De plus, sous de bonnes hypothèses, on dispose d'outils permettant de faciliter le calcul du groupe fondamental de X , en se ramenant au calcul du groupe fondamental de certains sous-espaces de X , plus simples. C'est l'intérêt du théorème suivant.

Théorème (van Kampen). *Soient X un espace topologique, et U_1 et U_2 deux ouverts recouvrant X connexes par arcs, dont leur intersection est aussi connexe par arcs. Alors*

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U_1) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2)} \pi_1(U_2).^a$$

a. La notation $G * H$ signifie le *produit libre* des groupes G et H . Une définition y est donnée en annexe C, ainsi qu'une partie de la démonstration du théorème. La notation $G *_K H$ signifie le *produit libre amalgamé* des groupes G et H au dessus du groupe K , et est définie dans les exemples de somme amalgamée dans la section 2.3.

Grâce à ce théorème, on peut montrer que toute sphère S^n pour $n \geq 2$ est simplement connexe. En effet, considérons deux points antipodaux N et S de S^n et soient les ouverts $U_1 = S^n \setminus \{N\}$ et $U_2 = S^n \setminus \{S\}$. Ils sont tous deux homéomorphes au disque D^n de \mathbf{R}^n , donc simplement connexes. De plus $U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs. Donc par le théorème de van Kampen, $\pi_1(S^n)$, qui est un quotient de $\pi_1(U_1) * \pi_1(U_2) \cong \{0\} * \{0\} \cong \{0\}$, est lui-même le groupe trivial. Et ainsi, S^n est simplement connexe.

Cependant, cette théorie a ses limites, car on « perd » en informations. Par exemple, on a le célèbre théorème de Brouwer qui énonce que, *pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, toute application continue $f : D^n \rightarrow D^n$ du disque unité admet un point fixe*. Pour $n = 2$, la démonstration repose sur l'obtention d'une contradiction avec le fait que $\pi_1(S^1) \neq \{0\}$. Détaillons cette démonstration qui repose essentiellement sur le caractère fonctoriel du groupe fondamental, dont les bonnes propriétés permettent d'aboutir rapidement au résultat.

Preuve du théorème de Brouwer pour $n = 2$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $r : D^2 \rightarrow S^1$ est une rétraction. Alors, en notant $i : S^1 \rightarrow D^2$ l'inclusion canonique, on a que $r \circ i = 1_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$. Ainsi, par fonctorialité du groupe fondamental, on a que $r_* \circ i_*$ (en notant g_* le morphisme

associé à g par le foncteur π_1) est l'identité sur $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\mathbf{Z}} & \xrightarrow{1_{\mathbf{Z}}} & \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\mathbf{Z}} \\
 & \searrow i_* & \nearrow r_* \\
 & \pi_1(D^2) &
 \end{array}$$

Mais D^2 est contractile, donc $\pi_1(D^2) = \{0\}$. D'où la contradiction.

Donc, si $f : D^2 \rightarrow D^2$ était une application continue sans point fixe, on pourrait définir la rétraction $r : D^2 \rightarrow S^1; x \mapsto r(x)$, où $r(x)$ est l'unique point d'intersection de la demi-droite $[f(x), x]$ avec S^1 . r est bien une rétraction; en effet, elle est continue puisque des petites perturbations sur x induisent par continuité de f des petites perturbations sur $f(x)$ et donc sur $r(x)$ qui se trouve sur la demi-droite $[f(x), x]$. De plus, on a pour tout $x \in S^1, r \circ i(x) = r(x) = x$, i.e. $r \circ i = 1_{S^1}$. □

Cependant, puisque $\pi_1(S^{n-1}) = \{0\}$ pour $n > 2$, on ne peut plus émettre le même argument. On doit alors faire intervenir les groupes d'homotopie $\pi_n(X, x_0)$ de plus haut degré, qui sont en général des groupes très compliqués ($\pi_n(X, x_0)$ est le groupe des classes d'homotopie de S^n dans X , relativement à $s_0 \in S^n$, envoyant s_0 sur x_0). Par contre, si on avait un foncteur F à valeurs dans la catégorie des groupes tel que $F(S^{n-1}) \neq \{0\}$ et $F(D^n) = \{0\}$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pourrait généraliser la preuve.

Une réponse à ce problème de calcul des groupes d'homotopie est de vouloir les « abélianiser », en se libérant des points de base, et en les rendant ainsi plus faciles à calculer. C'est pourquoi on introduit un nouvel invariant topologique, un foncteur à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens : l'homologie.

2 Catégories

L'idée de catégorie vient du fait que beaucoup d'objets mathématiques *a priori* sans lien ont des propriétés similaires. De plus, ces objets sont intimement liés aux applications qui les relient : les groupes et les morphismes, les espaces topologiques et les applications continues, les espaces vectoriels et les applications linéaires, etc. Il est alors venue l'idée dans les années 1945 de regrouper ces objets et applications dans des structures, et d'étudier ces structures plutôt que les éléments les composant. C'est ce qui motive l'introduction de la théorie des catégories : on abstrait les idées, pour obtenir des résultats forts qui s'appliquent à une multitude d'objets. Ainsi, cette idée unificatrice permet de donner des résultats et des concepts utiles partout en mathématiques, bien que très abstraits.

2.1 Catégories

Définition 1. Une **catégorie** est un ensemble \mathcal{C} dont les éléments sont appelés **objets**, tel que

a) pour tout couple (X, Y) d'objets de \mathcal{C} , il existe un ensemble noté $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (ou plus simplement $\text{Hom}(X, Y)$), appelé **ensemble des morphismes de \mathcal{C} de X dans Y** et dont les éléments sont appelés **morphismes** (ou **flèches**);

b) pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets de \mathcal{C} , il existe une application $\circ_{\mathcal{C}}$

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) &\rightarrow \text{Hom}(X, Z) \\
 (f, g) &\mapsto g \circ_{\mathcal{C}} f
 \end{aligned}$$

appelée **loi de composition** (ou plus simplement **composition**; on la note souvent simplement \circ) telle que

- pour tous X, Y, Z et T dans \mathcal{C} , et pour tout f dans $\text{Hom}(X, Y)$, g dans $\text{Hom}(Y, Z)$ et h dans $\text{Hom}(Z, T)$, on a $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;

- pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe $e \in \text{Hom}(X, X)$ tel que, pour tout $Y \in \mathcal{C}$, on ait $f \circ e = f$ pour tout $f \in \text{Hom}(X, Y)$ et $e \circ g = g$ pour tout $g \in \text{Hom}(Y, X)$.

Remarques.

1. L'élément e est unique (si e et e' sont deux tels morphismes, on a $e = e \circ e' = e' \circ e = e'$) et est appelé **identité** de X . Il est noté 1_X .

2. Si X et Y sont deux objets de \mathcal{C} , et si, pour $f \in \text{Hom}(X, Y)$, il existe $g \in \text{Hom}(Y, X)$ tel que $f \circ g = 1_Y$ et $g \circ f = 1_X$, alors un tel g est unique et f est appelé **isomorphisme** de X sur Y .

3. **Attention.** Nous savons qu'on ne peut pas considérer « l'ensemble de tous les ensembles » car cela mène à une contradiction appelée le paradoxe de Russel. Et, de même, nous ne pouvons pas parler de l'ensemble de tous les groupes, etc.

Il existe cependant des méthodes très abstraites consistant à « généraliser » la notion d'ensemble. Mais dans toute la suite, nous nous contenterons de considérer seulement ce qu'on appelle des « petites » catégories, c'est-à-dire des catégories dont l'ensemble des objets est *vraiment* un ensemble. Nous ne parlerons donc pas de la catégorie des groupes, mais seulement de la catégorie des groupes dont l'ensemble sous-jacent appartient à un ensemble d'ensembles prédéfini U , ayant de bonnes propriétés.

Dans toute la suite de ce mémoire, les catégories considérées seront des ensembles, et si leurs objets sont des ensembles, ils appartiendront à U . Et de ce fait U devient implicite.

Donnons quelques exemples de catégories utiles pour la suite.

Exemples.

1. Posons \mathcal{C} l'ensemble de tous les ensembles qui appartiennent à U . Pour X, Y et Z dans \mathcal{C} , on pose $\text{Hom}(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y , et on prend la composition des applications comme loi de composition pour $\text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z)$. On obtient alors une catégorie qu'on appelle la **catégorie des ensembles** de U et applications, que l'on note **Ens**.

2. Posons \mathcal{C} l'ensemble des groupes (respectivement les groupes abéliens, anneaux unitaires commutatifs, les A -modules pour un anneau unitaire commutatif A donné, les espaces topologiques) dont l'ensemble sous-jacent appartient à U . Pour X, Y et Z dans \mathcal{C} , on pose $\text{Hom}(X, Y)$ les morphismes de groupes de X dans Y (respectivement les morphismes de groupes, les morphismes d'anneaux unitaires, les applications A -linéaires, les applications continues), et on prend la composition des applications comme loi de composition pour $\text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z)$. On obtient alors une catégorie, notée **Gr** (respectivement **Ab**, **Ann**, **A-Mod** et **Top**) et appelée **catégorie des groupes** et morphismes de groupes (respectivement **des groupes abéliens** et morphismes de groupes, **des anneaux** et morphismes d'anneaux, **des A-modules** et applications A -linéaires, **des espaces topologiques** et applications continues).

3. Soit \mathcal{C} une catégorie. On appelle **diagramme** la catégorie D dont les objets sont, pour un ensemble quelconque I , une collection $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathcal{C} . Pour tous i et j dans I , l'ensemble des morphismes de D entre X_i et X_j est un sous-ensemble de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_j)$, noté $D(i, j)$ tel que pour tous i, j et k dans I , et tous $f \in D(i, j)$ et $g \in D(j, k)$, la composée $g \circ_{\mathcal{C}} f$ soit dans $D(i, k)$, et pour tout $i \in I$, on a $1_{X_i} \in D(i, i)$ (la composition dans D est donc la même que celle dans \mathcal{C}).

De plus, si, pour tous i et j dans I , $D(i, j)$ contient au plus un élément, on dit que le diagramme D est **commutatif**.

4. Soit $(G_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{Ab}^{\mathbb{N}}$ une suite de groupes abéliens, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_{n+1} : G_{n+1} \rightarrow G_n$ un morphisme de groupes (parfois appelé *différentielle*, avec $g_0 = 0$) tel que $g_n \circ g_{n+1} = 0$.

$$\dots \xrightarrow{g_{n+1}} G_n \xrightarrow{g_n} \dots \xrightarrow{g_2} G_1 \xrightarrow{g_1} G_0 \xrightarrow{g_0} \{0\}$$

Une telle suite s'appelle un **complexe de chaînes**, et on la note $(G_n, g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou plus simplement $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre. Soit $(H_n, h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un second complexe de chaînes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit φ_n un morphisme de groupes entre G_n et H_n . Notons $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$;

si le diagramme suivant est commutatif,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{g_{n+1}} & G_n & \xrightarrow{g_n} & \dots & \xrightarrow{g_2} & G_1 & \xrightarrow{g_1} & G_0 & \xrightarrow{g_0} & \{0\} \\
 & & \downarrow \varphi_n & & & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 & & \\
 \dots & \xrightarrow{h_{n+1}} & H_n & \xrightarrow{h_n} & \dots & \xrightarrow{h_2} & H_1 & \xrightarrow{h_1} & H_0 & \xrightarrow{h_0} & \{0\}
 \end{array}$$

on appelle alors φ **application de chaînes**. Dans ce cas, l'ensemble des complexes de chaînes, muni des applications de chaînes, est une catégorie, notée **Ch(Ab)**. C'est la catégorie des complexes de chaînes (la composition des morphismes étant la composition composante par composante).

Définition 2. Soit \mathcal{C} une catégorie. On appelle **catégorie opposée à \mathcal{C}** la catégorie \mathcal{C}^0 contenant les mêmes objets que \mathcal{C} , et telle que pour tous X, Y dans \mathcal{C} , $\text{Hom}_{\mathcal{C}^0}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, et $g \circ_{\mathcal{C}^0} f = f \circ_{\mathcal{C}} g$.

Intuitivement, la catégorie opposée à \mathcal{C} est construite en prenant les mêmes objets que \mathcal{C} , mais en inversant le sens des flèches.

2.2 Foncteurs

Souvent, lorsqu'on étudie des structures mathématiques, les applications associées sont définies de telle sorte à respecter les structures en jeu. Pareillement avec les catégories, on définit la notion de « morphisme entre catégories », qui respecte une telle structure.

Définition 3. Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux catégories. On appelle **foncteur covariant** (ou simplement foncteur) de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' une application F de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' qui à tout objet X de \mathcal{C} associe un objet $F(X) \in \mathcal{C}'$ et à tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} associe un morphisme de \mathcal{C}' , noté

$$F_{X,Y}(f) : F(X) \rightarrow F(Y).$$

De plus, un foncteur F est assujéti aux conditions suivantes :

- pour tout $X \in \mathcal{C}$,

$$F_{X,X}(1_X) = 1_{F(X)};$$

- pour tous X, Y, Z dans \mathcal{C} , pour tous $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$,

$$F_{X,Z}(g \circ f) = F_{Y,Z}(g) \circ F_{X,Y}(f).$$

Un **foncteur contravariant** de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' est un foncteur covariant de \mathcal{C}^0 dans \mathcal{C}' .

De plus, on note souvent $f \mapsto f_*$ (resp. $f \mapsto f^*$) l'application $F_{X,Y}$ lorsque F est un foncteur covariant (resp. contravariant).

Exemples.

1. Foncteur d'oubli. Considérons les catégories **Ann** et **Gr**. À tout anneau associons le groupe additif sous-jacent et, à tout morphisme f d'anneaux, f lui-même considéré comme morphisme de groupes. On définit ainsi un foncteur appelé foncteur d'oubli de **Ann** dans **Gr** (ce foncteur « oublie » la structure d'anneau pour ne laisser place qu'à celle de groupe).

2. Notons **Top*** la catégorie des espaces topologiques **pointés**, c'est-à-dire les couples (X, x_0) où $X \in \mathbf{Top}$ et $x_0 \in X$ (x_0 est parfois appelé **point base**). Les morphismes de **Top*** sont les applications continues qui préservent le point base. Pour tout espace topologique pointé (X, x_0) , notons $\pi_1(X, x_0)$ le premier groupe d'homotopie de X basé en x_0 . Pour (Y, y_0) un autre espace topologique pointé et $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ un morphisme, notons $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ le morphisme qui à toute classe de chemins $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ associe la classe $[\varphi \circ f] \in \pi_1(Y, y_0)$. On définit ainsi un foncteur covariant $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Gr}$. Le tout est résumé dans le diagramme

ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 : \mathbf{Top}_* & \longrightarrow & \mathbf{Gr} \\ \\ \begin{array}{ccc} (X, x_0) & \xrightarrow{\pi_1} & \pi_1(X, x_0) \\ \varphi \downarrow & & \varphi_* \downarrow \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{\pi_1} & \pi_1(Y, y_0) \end{array} & & \begin{array}{c} [f] \\ \downarrow \\ \varphi_*([f]) = [\varphi \circ f] \end{array} \end{array}$$

2.3 Problèmes universels

Parfois, on souhaite définir un objet satisfaisant à une contrainte spécifique, tout en souhaitant que cet objet reste le plus général possible. Cette idée « d’être général » passe par la notion de propriété universelle.

Définition 4. Soit \mathcal{C} une catégorie, et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur. Soit A un objet de \mathcal{C} et $\theta \in F(A)$. On dit que (A, θ) est **solution au problème universel posé par F** si

$$\forall X \in \mathcal{C}, \forall f \in F(X), \exists ! g : A \rightarrow X, F(g)(\theta) = f.$$

Une solution à un problème universel, si elle existe, est unique à un unique isomorphisme près. De plus, si une solution (A, θ) au problème posé par F existe, alors pour tout $X \in \mathcal{C}$, l’application $\eta_X : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \rightarrow F(X)$ définie par $\eta_X(g) = F(g)(\theta)$ est une bijection. Donnons quelques cas particuliers de problèmes universels.

Somme. Soit \mathcal{C} une catégorie, $(A_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d’objets de \mathcal{C} . Posons $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ le foncteur défini par

$$\forall X \in \mathcal{C}, F(X) = \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, X) = \{(f_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I, f_i : A_i \rightarrow X\}.$$

De plus, pour tous X et Y dans \mathcal{C} , et $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, on définit $F(h) \in \text{Hom}_{\mathbf{Ens}}(F(X), F(Y))$ par

$$\forall (f_i)_{i \in I} \in F(X), F(h)(f_i)_{i \in I} = (h \circ f_i)_{i \in I}.$$

Alors une solution $(A, (\varphi_i)_{i \in I})$ au problème universel posé par F , notée $\left(\bigoplus_{i \in I} A_i, (\varphi_i)_{i \in I}\right)$ lorsqu’elle existe, s’appelle la **somme** des $(A_i)_{i \in I}$ et vérifie, par la remarque précédente :

$$\forall X \in \mathcal{C}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\bigoplus_{i \in I} A_i, X\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, X).$$

Exemples.

1. Dans la catégorie des ensembles \mathbf{Ens} , la somme d’une famille d’ensembles $(X_i)_{i \in I}$ correspond à la *réunion disjointe* $S = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ des $(X_i)_{i \in I}$. En effet, la réunion disjointe des $(X_i)_{i \in I}$ est l’ensemble des couples (i, x) où $i \in I$ et $x \in X_i$. Les morphismes associés sont donnés par $\varphi_i : x \mapsto (i, x)$ pour tout $i \in I$. Et pour tout $X \in \mathbf{Ens}$, l’unique morphisme $g : S \rightarrow X$ tel que $g \circ \varphi_i = f_i$ pour tout $i \in I$ (f_i étant une composante d’un élément de $F(X) = \prod_{i \in I} \text{Hom}(A_i, X)$) est donné par $g(i, x) = f_i(x)$.

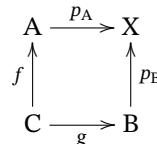
2. Dans la catégorie des espaces topologiques \mathbf{Top} , la somme correspond à la réunion disjointe $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ d’une famille d’espaces topologiques, munie de la topologie dont les ouverts sont les réunions disjointes $\bigsqcup_{i \in I} U_i$ où, pour tout $i \in I$, U_i est un ouvert de X_i . On remarque d’ailleurs que les applications $\varphi_i : x \mapsto (i, x)$ définies dans l’exemple ci-dessus pour la catégorie \mathbf{Ens} sont bien continues, et donc sont bien dans $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(X_i, \bigsqcup_{i \in I} X_i\right)$.

3. Dans la catégorie des groupes \mathbf{Gr} , la somme d'une famille de groupes $(G_i)_{i \in I}$ existe toujours, et on l'appelle le **produit libre** des groupes $(G_i)_{i \in I}$. On la note $\ast_{i \in I} G_i$. Pour une description plus concrète, voir l'annexe C.

Somme amalgamée. Soit \mathcal{C} une catégorie, et soient A, B et C trois objets de \mathcal{C} . Soient $f : C \rightarrow A$ et $g : C \rightarrow B$ deux morphismes. Posons $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ le foncteur défini par

$$\forall X \in \mathcal{C}, F(X) = \{(p_A, p_B) \mid p_A : A \rightarrow X, p_B : B \rightarrow X, p_A \circ f = p_B \circ g\},$$

c'est-à-dire que $F(X)$ est l'ensemble des couples (p_A, p_B) tels que le diagramme suivant est commutatif :



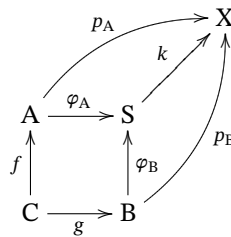
De plus, pour tous X et Y dans \mathcal{C} , et $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, on définit $F(h) \in \text{Hom}_{\mathbf{Ens}}(F(X), F(Y))$ par

$$\forall (p_A, p_B) \in F(X), F(h)(p_A, p_B) = (h \circ p_A, h \circ p_B).$$

Alors, une solution $(S, (\varphi_A, \varphi_B))$ au problème posé par F s'appelle la **somme amalgamée** de A et B , et vérifie

$$\forall X \in \mathcal{C}, \forall (p_A, p_B) \in F(X), \exists ! k : S \rightarrow X, p_A = k \circ \varphi_A \text{ et } p_B = k \circ \varphi_B.$$

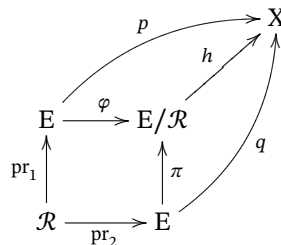
Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :



On la note $S = A \sqcup_C B$.

Exemples.

1. Mettons-nous dans le cas où $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$, et soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence \mathcal{R} , vue comme sous-ensemble de $E \times E^a$. Soient alors $\text{pr}_1 : \mathcal{R} \rightarrow E$ et $\text{pr}_2 : \mathcal{R} \rightarrow E$ les projections suivant respectivement la première et seconde composante. Alors la somme amalgamée $E \sqcup_{\mathcal{R}} E$ s'appelle le **quotient** de E par \mathcal{R} , qu'on note E/\mathcal{R} . Cet ensemble est donc muni de deux applications φ et π (qui en fait coïncident, appelée *projection canonique*), et, pour tout $X \in \mathbf{Ens}$ et toutes applications $p, q : E \rightarrow X$ telles que $p \circ \text{pr}_1 = q \circ \text{pr}_2$, il existe une unique application $h : E/\mathcal{R} \rightarrow X$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :



Donc par commutativité, on a nécessairement $p = q$, et on retrouve bien le théorème de factorisation.

En plus de cela, toujours dans la catégorie des ensembles, on peut voir toute somme amalgamée comme un quotient. Ainsi, dans cette catégorie, ces deux notions coïncident.

2. Lorsque $\mathcal{C} = \mathbf{Gr}$, alors la somme amalgamée ainsi définie s'appelle le **produit libre amalgamé** des groupes A et B au-dessus de C , qu'on note $A *_C B$. Il s'agit du quotient $(A * B)/N$, où N est le plus petit sous-groupe distingué de $A * B$ contenant les éléments $(i_A \circ f(c))(i_B \circ g(c))^{-1}$ pour tout $c \in C$, avec $i_A : A \rightarrow A * B$ et $i_B : B \rightarrow A * B$ les deux inclusions, et $f : C \rightarrow A$ et $g : C \rightarrow B$ des morphismes de groupes.

a. C'est-à-dire un sous-ensemble D de $E \times E$ tel que $(x, x) \in D$ pour tout $x \in E$, si $(x, y) \in D$, alors $(y, x) \in D$ pour tout $(x, y) \in E \times E$ et $(x, z) \in D$ si $(x, y) \in D$ et $(y, z) \in D$ pour tous x, y et z dans E .

3 Exemples d'espaces topologiques

Après toutes ces considérations très générales sur les catégories et en vue de l'étude des espaces topologiques, donnons quelques exemples concrets d'espaces topologiques. Ils donneront une intuition sur ce qui va suivre, et on en étudiera certains plus en détails par la suite.

3.1 Simplexes

Un premier exemple élémentaire est ce qu'on appelle un **n -simplexe standard**, noté Δ^n , pour $n \in \mathbf{N}$; c'est en quelque sorte une généralisation du triangle usuel. Plus précisément,

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ et } \forall i \in \{0, \dots, n\}, t_i \geq 0 \right\}.$$

Les Δ^n sont des espaces topologiques, munis de la topologie induite sur \mathbf{R}^{n+1} (voir la figure 1).

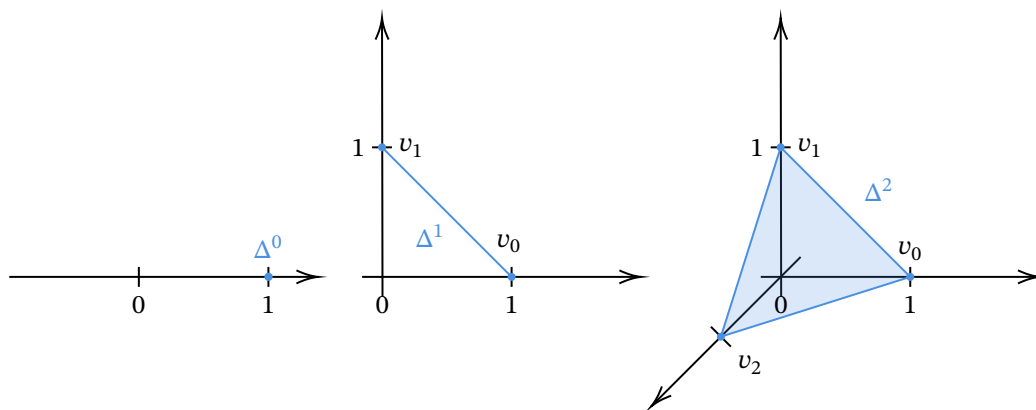


Figure 1. Les n -simplexes pour $0 \leq n \leq 2$

Les vecteurs v_0, v_1, \dots, v_n de la base canonique de \mathbf{R}^{n+1} sont alors appelés les **sommets** du n -simplexe. Le simplexe lui-même est noté $[v_0, \dots, v_n]$. On appelle **face** du simplexe $[v_0, \dots, v_n]$ tout $(n - 1)$ -simplexe obtenu à partir de $[v_0, \dots, v_n]$ en enlevant un point (voir la figure 2).

On ordonne alors les sommets du n -simplexe, ce qui fournit automatiquement une orientation de toutes les faces. L'union de toutes les faces de Δ^n est appelé le **bord** de Δ^n , noté $\partial\Delta^n$. On note $\mathring{\Delta}^n = \Delta^n \setminus \partial\Delta^n$ l'intérieur de Δ^n .

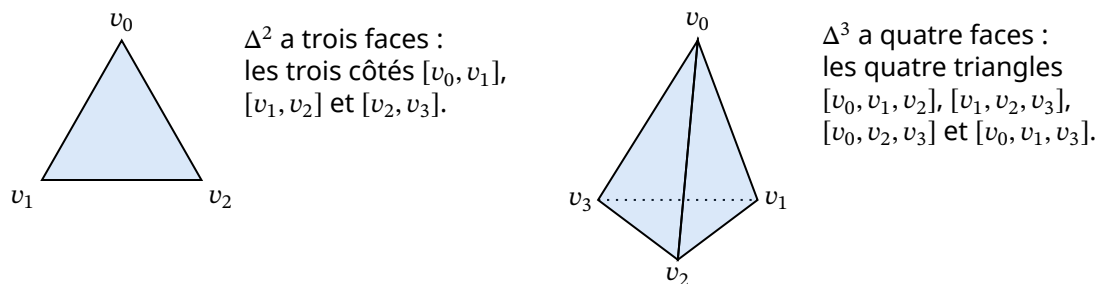


Figure 2. Faces de Δ^2 et Δ^3

Plus généralement, tout espace homéomorphe à un n -simplexe standard s'appelle un n -simplexe *abstrait*.

À partir d'un espace topologique X donné, on va chercher à obtenir de nouveaux espaces, par exemple en « collant » certains points de X sur d'autres *via* une certaine relation d'équivalence. C'est ce qu'on appelle la *topologie quotient*.

3.2 Topologie quotient

Définition 5. Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique, \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X . Notons $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ la projection canonique. La **topologie quotient** définie sur X/\mathcal{R} est la collection d'ensembles suivante :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{R}} = \{O \in \mathfrak{P}(X/\mathcal{R}) \mid \pi^{-1}(O) \in \mathcal{T}\}.$$

Donnons quelques exemples d'espaces topologiques définis par un quotient.

Exemples.

1. Si X est un espace topologique et A est une partie de X , on pose la relation \mathcal{R} , pour x et y dans X ,

$$x\mathcal{R}y \iff (x \in A \text{ et } y \in A) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x = y).$$

C'est bien une relation d'équivalence. On note alors $X/\mathcal{R} = X/A$, et on le munit de la topologie quotient. Par exemple, si $X = [-1; 1]$ et si $A = \{-1, 1\}$, on peut montrer que X/A est homéomorphe au cercle S^1 .

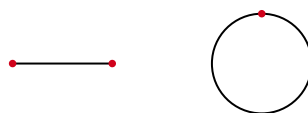


Figure 3. Cercle S^1

Plus généralement, en notant $D^n \subset \mathbb{R}^n$ la boule unité, et $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ la sphère unité, on a que le quotient D^n/S^{n-1} est homéomorphe à S^n .

2. **Ruban de Möbius.** Soit $X = [-1; 1] \times [-1; 1]$. On pose la relation d'équivalence \mathcal{R} , pour (x, y) et (x', y') dans X ,

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff (y = -y' \in \{\pm 1\} \text{ et } x = -x') \text{ ou } (x, y) = (x', y').$$

Donc si (x, y) n'est pas sur le bord inférieur ou supérieur du carré, sa classe est lui-même. Sinon, c'est $\{(x, y), (-x, -y)\}$, c'est-à-dire qu'on identifie (x, y) avec son opposé. C'est comme si on avait « recollé » le bord inférieur avec le bord supérieur, en changeant l'orientation. On peut représenter cette situation comme suit :

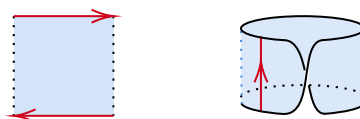


Figure 4. Ruban de Möbius

3. **Plan projectif réel.** De même, reprenons $X = [-1; 1] \times [-1; 1]$. On pose la relation d'équivalence \mathcal{R} , pour (x, y) et (x', y') dans X ,

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff (y = -y' \in \{\pm 1\} \text{ et } x = -x') \text{ ou } (x = -x' \in \{\pm 1\} \text{ et } y = -y') \text{ ou } (x, y) = (x', y').$$

Donc si (x, y) est à l'intérieur du carré, sa classe est lui-même. Sinon, (x, y) est sur un bord du carré, et sa classe est $\{(x, y), (-x, -y)\}$. On « recolle » ainsi le côté gauche sur le côté droit en changeant l'orientation, et on « recolle » le côté inférieur sur le côté supérieur en changeant aussi l'orientation. On peut alors représenter ceci comme suit :

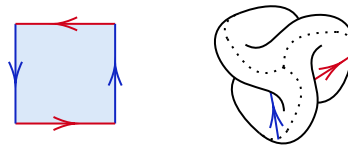


Figure 5. Plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

En suivant une construction similaire, on obtient une description du **tore** et de la **bouteille de Klein**, résumée dans les carrés suivants :



Figure 6. Tore et Bouteille de Klein

3.3 Espaces définis par recollement

Énonçons un autre principe de construction d'espaces topologiques, à savoir le **recollement**, qui consiste à attacher un certain espace topologique à un autre suivant l'image d'une application. Il s'agit en fait d'un cas particulier de somme amalgamée dans la catégorie des espaces topologiques **Top**.

Définition 6. Soient X et Y deux objets de la catégorie **Top**, et $A \subset Y$ un sous-espace topologique de Y . Soit $f : A \rightarrow X$ une fonction continue et $i : A \rightarrow Y$ l'injection canonique. Alors on appelle **recollement de Y sur X le long de f** la somme amalgamée $X \sqcup_A Y$. On la note $X \cup_f Y$.

On peut montrer que que le recollement de Y sur X le long de f est l'espace topologique quotient $(X \sqcup Y)/\mathcal{R}$, où \mathcal{R} est la relation qui identifie a et $f(a)$ pour tout $a \in A$.

Définition 7. Soit $n \in \mathbb{N}$, et X et Y deux variétés connexes de même dimension n (cf. annexe B). Soient $x \in X, y \in Y$, et V_x et V_y des voisinages respectifs de x et y homéomorphes à D^k ($1 \leq k \leq n$). On note de tels homéomorphismes respectivement $\varphi : D^k \rightarrow V_x$ et $\psi : D^k \rightarrow V_y$. Posons $X' = X \setminus \overset{\circ}{V}_x, Y' = Y \setminus \overset{\circ}{V}_y$ et $f = \varphi \circ \psi^{-1}$. Alors, on appelle **somme connexe** de X et Y le recollement $X' \cup_f Y'$ de Y' sur X' le long de f , qu'on note $X \# Y$.

Intuitivement, la somme connexe de deux surfaces est le recollement de ces deux mêmes surfaces où l'on a « coupé » une boule du bord.

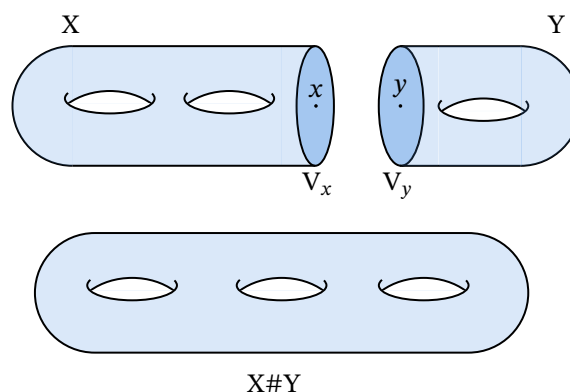


Figure 7. Somme connexe de deux surfaces de \mathbb{R}^3

Un cas pratique d'utilisation de somme connexe est la construction d'espaces $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivante. Si $n = 0$, alors $X_0 = S^2$ la sphère unité de \mathbb{R}^3 . Si $n = 1$, alors on pose X_1 le tore T^2 défini dans la section précédente. Pour $n \geq 1$, on définit X_{n+1} comme la somme connexe de X_n avec le tore T^2 . On

construit ainsi une suite d'espaces topologiques, compacts, connexes, sans bord et orientables*, appelés **surfaces de genre n** orientables.

Cette construction d'espaces topologiques prend son sens grâce au théorème de classification des surfaces fermées connexes suivant :

Théorème. *Toute surface S fermée (compacte, sans bord) et connexe est homéomorphe soit :*

- à l'un des X_n pour un certain $n \in \mathbf{N}$ (dans le cas où S est orientable);
- à la somme connexe d'un certain nombre de plans projectifs (dans le cas où S est non-orientable).

Par exemple, sur la figure 7 ci-dessus, X est une surface de genre 2, Y une surface de genre 1 et $X\#Y$ une surface de genre 3. On verra par la suite l'utilité de ce théorème à travers des calculs concrets, cf. section 5.2.

4 Homologie

4.1 Δ -complexes

Afin d'étudier certains espaces topologiques, on est amené à les représenter de manière plus pratique, quand cela est possible. On va alors recouvrir, ou *triangler*, ces espaces grâce à des simplexes. Cette structure mise sur un espace topologique est ce qu'on appelle une structure de Δ -complexe simplicial.

Définition 8. Soit X un espace topologique. Une **structure de Δ -complexe simplicial** sur X est une collection d'applications continues $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$, dépendantes de α dans un certain ensemble \mathcal{A} , telles que :

1. la restriction $\sigma_\alpha|_{\Delta^n}$ est injective, et chaque point de X est dans l'image d'exactly une des restrictions $\sigma_\alpha|_{\Delta^n}$;
2. toute restriction de σ_α sur une face de Δ^n est un autre σ_β ;
3. pour toute partie $A \subset X$, A est ouvert dans X si et seulement si $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ est ouvert dans Δ^n , pour tout α .

Par abus de langage, on dira aussi simplement, si X est un espace topologique muni d'une structure de Δ -complexe, que X est un **Δ -complexe**.

L'idée de cette définition est que tout point de X n'est alors recouvert qu'une et une seule fois par l'intérieur d'un de ces simplexes, et toutes les faces de tous les « triangles » sont dans la collection ; autrement dit, il n'y a pas de trou.

Grâce à cette définition, on a une manière « concrète » de définir un Δ -complexe, qui est surtout utile en pratique. On peut toutefois remarquer qu'une définition plus formelle et équivalente est possible. Cette autre définition est donnée dans la remarque suivante.

Remarque. Soit X un Δ -complexe. Par définition, il existe une collection Σ d'applications continues, indexée par un certain ensemble \mathcal{A} :

$$\Sigma = \{\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \rightarrow X : \alpha \in \mathcal{A}, n_\alpha \geq 0\}.$$

On peut alors voir X comme la somme amalgamée du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \Delta^{n_\alpha} & \hookrightarrow & \bigsqcup_{\beta \in \mathcal{A}} \Delta^{n_\beta} \\ & \searrow & \\ & & \bigsqcup_{\beta \in \mathcal{A}} \Delta^{n_\beta} \end{array}$$

où les injections sont des inclusions de faces entre les faces de simplexes indexées par α dans les simplexes indexés par β .

*. On dit qu'une surface est *sans bord* si tout point admet un voisinage homéomorphe à la boule unité ouverte. On dit qu'elle est *orientable* si aucun de ses sous-ensembles n'est homéomorphe au ruban de Möbius.

Définition 9. Soit X un espace topologique et soit \mathbb{K} une structure de Δ -complexe sur X . Notons $|\mathbb{K}|$ la réunion de tous les simplexes abstraits (c'est-à-dire les $\sigma_\alpha(\Delta^n)$ pour tout $\sigma_\alpha \in \mathbb{K}$) associés à \mathbb{K} . On appelle **triangulation** \mathcal{T} de X la donnée de \mathbb{K} et d'un homéomorphisme $h : |\mathbb{K}| \rightarrow X$.

Par exemple, pour le tore ou la bouteille de Klein, on pourrait voir le carré de la figure 6 comme la réunion de deux triangles, comme dans le découpage suivant :



Figure 8. Triangulation du Tore et de la Bouteille de Klein

Exemple (Triangulation du cercle). Considérons le cercle S^1 , avec un point A au pôle nord, et un point B au pôle sud. On note alors a le chemin orienté reliant B à A sur la partie gauche du cercle, et b le même chemin, sur la partie droite.

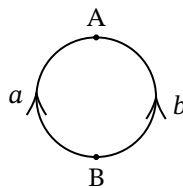


Figure 9. Triangulation de S^1

On peut alors vérifier que la collection suivante d'applications constitue une structure de Δ -complexe simplicial sur S^1 :

- $\sigma_1 : \Delta^0 \rightarrow S^1 ; [v_0] \mapsto A$
- $\sigma_2 : \Delta^0 \rightarrow S^1 ; [v_0] \mapsto B$
- $\sigma_3 : \Delta^1 \rightarrow S^1 ; [v_0, v_1] \mapsto a$
- $\sigma_4 : \Delta^1 \rightarrow S^1 ; [v_0, v_1] \mapsto b$

4.2 Homologie simpliciale

Une fois la triangulation de l'espace topologique X obtenue, on va chercher à établir une structure de groupe à partir des simplexes.

Définition 10. Soit X un espace topologique muni d'une triangulation \mathcal{T} . Soit $n \in \mathbf{N}$. On appelle groupe abélien des **chaînes de dimension n** ou des **n -chaînes**, l'ensemble des sommes formelles finies suivant :

$$\Delta_n^{\mathcal{T}}(X) = \left\{ \sum_{\alpha} n_{\alpha} \sigma_{\alpha} : \forall \alpha, n_{\alpha} \in \mathbf{Z} \right\}.$$

L'ensemble $\Delta_n^{\mathcal{T}}(X)$ est donc le groupe abélien libre de base les σ_{α} .

Ces sommes formelles sont pratiques pour faire des opérations abstraites sur ces groupes. Cependant, pour les calculs concrets, on pourra identifier σ_{α} avec son image $\sigma_{\alpha}(\Delta^n)$, ce qui rendra le groupe abélien $\Delta_n^{\mathcal{T}}(X)$ non plus engendré par les σ_{α} , mais par les n -simplexes associés à la triangulation de X .

Si aucune confusion n'est à craindre sur le choix de la triangulation \mathcal{T} , on notera simplement $\Delta_n(X)$ à la place de $\Delta_n^{\mathcal{T}}(X)$, en gardant à l'esprit la dépendance de $\Delta_n(X)$ en \mathcal{T} .

En reprenant l'exemple précédent, on a $\sigma_1([v_0]) = A$ et $\sigma_2([v_0]) = B$, donc $\Delta_0(S^1) = \{n_1A + n_2B : n_1, n_2 \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{Z}.A \oplus \mathbf{Z}.B$.[†]

Remarque. On peut aussi voir la suite de \mathbf{Z} -modules $(\Delta_n(X))_{n \in \mathbf{N}}$ comme l'image de X par un foncteur covariant. On détaillera cela dans la partie 4.3 sur l'homologie singulière.

[†]. L'intérieur de Δ^0 est lui-même, car il est ouvert puisque composé d'un seul point, donc la topologie induite sur cet espace est la topologie grossière, ce qui fait de Δ^0 un ouvert.

On a vu qu'en enlevant un sommet à un n -simplexe, on obtient un $(n - 1)$ -simplexe. On peut donc d'une certaine façon généraliser cette idée entre les n -chaînes et les $(n - 1)$ -chaînes.

Définition 11. Soit X un Δ -complexe et $n \in \mathbf{N}^*$. On définit une application \mathbf{Z} -linéaire appelée **homomorphisme de bord** $\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$ par :

$$\forall \alpha, \partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{\alpha|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}}$$

avec la notation $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] = [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Par convention, on considère que $\partial_0 = 0$.

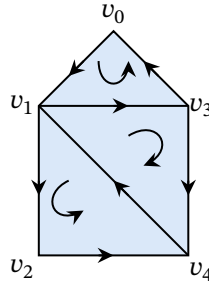
Si aucune confusion n'est à craindre, on écrira souvent simplement ∂ au lieu de ∂_n .

Exemples.

1. Pour Δ^1 , on a $\partial_1([v_0, v_1]) = [v_1] - [v_0]$; pour Δ^2 , on trouve $\partial_2([v_0, v_1, v_2]) = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$. Et, on remarque que $\partial_1(\partial_2([v_0, v_1, v_2])) = \partial_1([v_1, v_2]) - \partial_1([v_0, v_2]) + \partial_1([v_0, v_1]) = [v_2] - [v_1] - [v_2] + [v_0] + [v_1] - [v_0] = 0$;

2. En reprenant l'exemple du cercle S^1 précédent, on a deux 1-simplexes identifiés à a et b , et $\partial_1(a) = \partial_1(b) = B - A$.

3. Considérons le graphe suivant :



Alors on a :

- $\partial_2([v_0, v_1, v_3]) = [v_1, v_3] - [v_0, v_3] + [v_0, v_1]$;
- $\partial_2([v_1, v_3, v_4]) = [v_3, v_4] - [v_1, v_4] + [v_1, v_3]$;
- $\partial_2([v_1, v_2, v_4]) = [v_2, v_4] - [v_1, v_4] + [v_1, v_2]$.

Donc par \mathbf{Z} -linéarité de ∂_n , on a : $\partial_2([v_1, v_3, v_4] + [v_1, v_2, v_4]) = [v_3, v_4] - 2[v_1, v_4] + [v_1, v_3] + [v_2, v_4] + [v_1, v_2]$, et comme précédemment, on peut vérifier que $\partial_1(\partial_2([v_1, v_3, v_4] + [v_1, v_2, v_4])) = 0$.

Les observations faites dans les exemples 1 et 3 se confirment par le théorème suivant :

Théorème 1. Soit X un Δ -complexe et $n \geq 2$. La composition $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}(X)$ est nulle.

Démonstration. Soit $\sigma \in \Delta_n(X)$; on a par définition

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

Notons, pour $0 \leq i, j \leq n$, $\sigma_i = \sigma_{|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$ et $\sigma_{ij} = \sigma_{|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n]}$ (selon si $i < j$ ou $j < i$).

Alors, par \mathbf{Z} -linéarité et en décomposant la somme, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) &= \partial_{n-1}\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i\right) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \left[\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \sigma_{ij} + \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i-1} \sigma_{ji} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} \sigma_{ij} + \sum_{j=0}^n \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j-1} \sigma_{ji} \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j} \sigma_{ij} - \sum_{j=0}^n \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \sigma_{ji} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

Par l'application bord, on a donc défini ce qu'on appelle un **complexe de chaînes** entre les groupes des n -chaînes, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\dots \longrightarrow \Delta_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \longrightarrow \dots$$

avec $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Cette condition, qui équivaut à dire que $\text{Im } \partial_{n+1} \subset \text{Ker } \partial_n$, amène à introduire la définition suivante :

Définition 12. Soit $n \in \mathbf{N}$ et X un espace topologique muni d'une triangulation. Le quotient $H_n^\Delta(X) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ est appelé le **n -ième groupe d'homologie simpliciale** du complexe de chaînes.

On appelle les éléments de $\text{Ker } \partial_n$ des **cycles**, et les éléments de $\text{Im } \partial_{n+1}$ des **bords**. Les éléments de $H_n^\Delta(X)$ sont donc les cycles *modulo* les bords.

Donnons quelques exemples de calcul de groupes d'homologie simpliciale.

Exemples.

1. Cercle S^1 . En reprenant l'exemple précédent du cercle, on a : $\Delta_0(S^1) = \mathbf{Z}.A \oplus \mathbf{Z}.B$ et $\Delta_1(S^1) = \mathbf{Z}.a \oplus \mathbf{Z}.b$. De plus, $\partial_1(a) = A - B$, et $\partial_1(b) = A - B$, donc on a le complexe de chaînes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0\} & \xrightarrow{\partial_2=0} & \Delta_1(S^1) & \xrightarrow{\partial_1} & \Delta_0(S^1) & \xrightarrow{\partial_0=0} & \{0\} \\
 & & a \longmapsto & \longrightarrow & A - B & & \\
 & & b \longmapsto & \longrightarrow & A - B & &
 \end{array}$$

Ainsi, l'application ∂_1 peut se représenter par la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ dans la « base » (A, B) .

On a donc :

- $H_0^\Delta(S^1) = \text{Ker } \partial_0 / \text{Im } \partial_1 = (\mathbf{Z}.A \oplus \mathbf{Z}.B) / \mathbf{Z}(A - B) \cong \mathbf{Z}.B \cong \mathbf{Z}^1$;
- $H_1^\Delta(S^1) = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2 = \text{Ker } \partial_1 = \mathbf{Z}.(a - b) \cong \mathbf{Z}$.

2. Sphère S^2 . Une façon de trianguler la sphère est de la voir comme un tétraèdre, autrement dit un 3-simplexe qu'on aurait « gonflé ». Les notations sont données dans la figure 10 suivante.

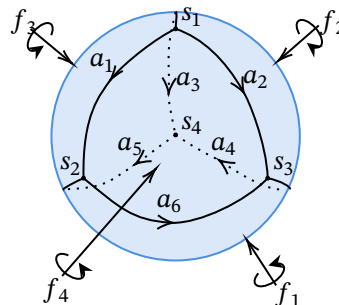


Figure 10. Triangulation de la sphère S^2

On a donc : $\Delta_0(S^2) = \mathbf{Z}.s_1 \oplus \mathbf{Z}.s_2 \oplus \mathbf{Z}.s_3 \oplus \mathbf{Z}.s_4$, $\Delta_1(S^2) = \mathbf{Z}.a_1 \oplus \mathbf{Z}.a_2 \oplus \mathbf{Z}.a_3 \oplus \mathbf{Z}.a_4 \oplus \mathbf{Z}.a_5 \oplus \mathbf{Z}.a_6$, et $\Delta_2(S^2) = \mathbf{Z}.f_1 \oplus \mathbf{Z}.f_2 \oplus \mathbf{Z}.f_3 \oplus \mathbf{Z}.f_4$. Et, on a le complexe de chaînes suivant :

$$\{0\} \xrightarrow{\partial_3=0} \Delta_2(S^2) \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1(S^1) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(S^2) \xrightarrow{\partial_0=0} \{0\}$$

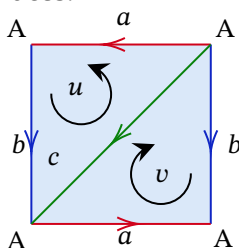
$$\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{matrix}$$

Après calculs, on obtient :

- $H_0^\Delta(S^2) \cong \mathbf{Z}$;
- $H_1^\Delta(S^2) = \{0\}$;
- $H_2^\Delta(S^2) \cong \mathbf{Z}$.

Plus généralement, on montrera par la suite que $H_0^\Delta(S^n) \cong H_n^\Delta(S^n) \cong \mathbf{Z}$ et $H_i^\Delta(S^n) = \{0\}$ pour $i \notin \{0, n\}$ (cf. section 4.4).

3. Bouteille de Klein. Reprenons la triangulation de la bouteille de Klein, K , faite à la figure 6, sous forme de deux 2-simplexes recollés. Notons a , b et c les flèches rouges, bleues et verte respectivement par rapport à la figure ci-dessous, et identifions tous les sommets au même sommet noté A . On note u et v les deux faces.



On a $\Delta_0(K) = \mathbf{Z}.A$, $\Delta_1(K) = \mathbf{Z}.a \oplus \mathbf{Z}.b \oplus \mathbf{Z}.c$, et $\Delta_2(K) = \mathbf{Z}.u \oplus \mathbf{Z}.v$. Et, on a le complexe de chaînes suivant :

$$\{0\} \xrightarrow{\partial_3=0} \Delta_2(K) \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1(K) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(K) \xrightarrow{\partial_0=0} \{0\}$$

$$\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \end{matrix}$$

On a donc :

- $H_0^\Delta(K) \cong \mathbf{Z}$;
- $H_1^\Delta(K) = (\mathbf{Z}.a \oplus \mathbf{Z}.b \oplus \mathbf{Z}.c) / (\mathbf{Z}(a + b - c) \oplus \mathbf{Z}(-a + b - c)) \cong (\mathbf{Z}.a \oplus \mathbf{Z}.b) / \mathbf{Z}(-2a) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}.b \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}^b$.

a. En effet, si $x \in H_0^\Delta(S^1)$, alors il existe n_A et n_B dans \mathbf{Z} tels que $x = n_A A + n_B B$. Mais on a $A - B \equiv 0$, d'où $x = (n_A + n_B)A$ et donc $\mathbf{Z}(A - B) = \mathbf{Z}.A$.

b. De même, si $x \in H_1^\Delta(K)$, alors il existe n_a, n_b et n_c dans \mathbf{Z} tels que $x = n_a a + n_b b + n_c c$. Mais on a $a + b - c \equiv 0$, donc $a + b \equiv c$, et $-a + b - c \equiv 0$, i.e. $-a + b - c \equiv -a + b - (a + b) \equiv -2a \equiv 0$. Donc finalement, $x = \bar{n}_a + n_b b$, avec \bar{n}_a la classe de n_a dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

On a donc choisi pour un espace topologique X donné, une triangulation. Mais, plusieurs structures de Δ -complexe existent pour un même espace X , et les groupes d'homologie simpliciale $H_n^\Delta(X)$ dépendent *a priori* de cette structure de Δ -complexe. Cependant, on pourrait montrer que si \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont deux triangulations, alors il existe une sous-triangulation \mathcal{T}_3 , commune à \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 . On peut aussi montrer que l'homologie d'une sous-triangulation $\mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_2$ donne le même résultat que l'homologie de \mathcal{T}_2 . Et ainsi, on a que $H_n^\Delta(\mathcal{T}_1) \cong H_n^\Delta(\mathcal{T}_2) \cong H_n^\Delta(\mathcal{T}_3)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

L'idée est alors de définir une homologie ne faisant pas intervenir de choix quant à la structure de Δ -complexe sur X , mais dépendant uniquement de l'espace X lui-même, en partant de l'ensemble de toutes les triangulations. C'est ainsi qu'est construite l'homologie singulière. On pourra aussi remarquer par la suite que l'homologie singulière est plus générale que l'homologie simpliciale, et s'applique sur des espaces topologiques n'ayant pas nécessairement une structure de Δ -complexe.

4.3 Homologie singulière

4.3.1 Définitions et premières propriétés

Soit X un espace topologique, et $n \in \mathbf{N}$. On définit un n -**simplexe singulier** dans X par une application continue $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Notons $C_n(X)$ le \mathbf{Z} -module des sommes formelles des n -simplexes contenus dans X , notés $(\sigma_j)_{j \in J}$ pour J un ensemble quelconque. Posons, à l'instar de l'homologie simpliciale, le **morphisme de bord** $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ défini par

$$\forall j \in J, \partial_n(\sigma_j) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{j|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]},$$

où, pour $0 \leq i \leq n$ et $j \in J$, $\sigma_{j|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$ peut être vu comme un $(n-1)$ -simplexe.

La différence entre cette définition et celle faite sur les chaînes d'homologie simpliciale est qu'ici on demande simplement que les σ_j soient continues de Δ^n dans X . Ceci généralise donc *a priori* la construction de l'homologie simpliciale.

Ainsi, on a, comme pour l'homologie simpliciale, ce qu'on appelle un **complexe de chaînes singulières**, noté $(C_n(X), \partial_n)_{n \in \mathbf{N}}$, ou plus simplement $(C_n(X))_{n \in \mathbf{N}}$,

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Proposition 1. *L'application définie par*

$$\begin{aligned} C_* : \mathbf{Top} &\rightarrow \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \\ X &\mapsto C_*(X) = (C_n(X), \partial_n)_{n \in \mathbf{N}} \end{aligned}$$

est un foncteur covariant. On note, pour X et Y dans \mathbf{Top} et $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$, $f_\#$ l'application de chaînes $C_{*X, Y}(f)$, définie par la collection des $f \circ \sigma$, pour chaque $\sigma \in C_n(X)$, en l'étendant linéairement sur \mathbf{Z} . C'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} (f_\#)_n : C_n(X) &\rightarrow C_n(Y) \\ \sum_{j \in J} n_j \sigma_j &\mapsto \sum_{j \in J} n_j f \circ \sigma_j \end{aligned}$$

et $f_\# = ((f_\#)_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbf{N}$. Par définition de $C_n(X)$, c'est un groupe abélien, et on a $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Donc $(C_n(X), \partial_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bien un complexe de chaînes.

De plus, $f_\#$ est bien une application de chaînes. En effet, pour $(C_n(X), \partial_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(C_n(Y), \delta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux complexes de chaînes, on a pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(f_\#)_{n-1} \circ \partial_n = \delta_n \circ (f_\#)_n$ par \mathbf{Z} -linéarité.

On a $1_X \circ \sigma = \sigma$ pour tout $\sigma \in C_n(X)$, donc on a bien $(1_X)_\# = 1_{C_*(X)}$. Il ne reste plus qu'à vérifier que, pour Z un troisième espace topologique, $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications continues, on ait $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$. En effet, on calcule, pour $\sum_{j \in J} n_j \sigma_j \in C_n(X)$,

$$\begin{aligned} ((g \circ f)_\#)_n \left(\sum_{j \in J} n_j \sigma_j \right) &= \sum_{j \in J} n_j (g \circ f) \circ \sigma_j = \sum_{j \in J} n_j g \circ (f \circ \sigma_j) \\ &= (g_\#)_n \left(\sum_{j \in J} n_j f \circ \sigma_j \right) = (g_\#)_n \left((f_\#)_n \left(\sum_{j \in J} n_j \sigma_j \right) \right) \\ &= (g_\# \circ f_\#)_n \left(\sum_{j \in J} n_j \sigma_j \right). \end{aligned}$$

□

Proposition 2. *L'application définie par*

$$H_* : \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbf{N}}$$

$$(G_n, g_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto (\text{Ker}(g_n) / \text{Im}(g_{n+1}))_{n \in \mathbf{N}}$$

est un foncteur covariant^a. Pour tout morphisme $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ entre deux complexes de chaînes $(G_n, g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(H_n, h_n)_{n \in \mathbf{N}}$, le morphisme entre leurs images respectives par H_* est la collection, pour $n \in \mathbf{N}$, des applications définies par,

$$(H_*\varphi)_n : \text{Ker}(g_n) / \text{Im}(g_{n+1}) \rightarrow \text{Ker}(h_n) / \text{Im}(h_{n+1})$$

$$\bar{x} \mapsto \overline{\varphi_n(x)}$$

en notant \bar{x} la classe de x (l'espace ambiant changeant suivant le contexte).

^a. On note $\mathbf{Ab}^{\mathbf{N}}$ la catégorie des suites de groupes abéliens, dont les morphismes sont les suites de morphismes de groupes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbf{N}$. On remarque que les quotients $\text{Ker}(g_n) / \text{Im}(g_{n+1})$ et $\text{Ker}(h_n) / \text{Im}(h_{n+1})$ sont bien définis par propriété des applications différentielles. Montrons donc que l'application $(H_*\varphi)_n$ est bien définie. Tout d'abord, on a $\varphi_n(\text{Ker}(g_n)) \subset \text{Ker}(h_n)$. En effet, pour $x \in \text{Ker}(g_n)$, i.e. $g_n(x) = 0$ dans G_{n-1} , on a $\varphi_{n-1}(g_n(x)) = \varphi_{n-1}(0) = 0$. Et, par commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{g_{n+2}} & G_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & G_n & \xrightarrow{g_n} & G_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & \dots \\ & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} & & \\ \dots & \xrightarrow{h_{n+2}} & H_{n+1} & \xrightarrow{h_{n+1}} & H_n & \xrightarrow{h_n} & H_{n-1} & \xrightarrow{h_{n-1}} & \dots \end{array}$$

on a $0 = \varphi_{n-1}(g_n(x)) = h_n(\varphi_n(x))$, donc $\varphi_n(x) \in \text{Ker}(h_n)$, i.e. $\varphi_n(\text{Ker}(g_n)) \subset \text{Ker}(h_n)$. Soit alors l'application

$$\widetilde{\varphi}_n : \text{Ker}(g_n) \rightarrow \text{Ker}(h_n) / \text{Im}(h_{n+1})$$

$$x \mapsto \overline{\varphi_n(x)}.$$

Cette application est donc bien définie. Montrons alors que

$$\text{Im}(g_{n+1}) \subset \text{Ker} \widetilde{\varphi}_n = \{x \in \text{Ker}(g_n) \mid \varphi_n(x) \in \text{Im}(h_{n+1})\}.$$

Soit $x \in \text{Im}(g_{n+1})$; alors il existe $y \in G_{n+1}$ tel que $g_{n+1}(y) = x$. Alors, on a $h_{n+1}(\varphi_{n+1}(y)) = \varphi_n(g_{n+1}(y)) = \varphi_n(x)$, toujours par commutativité du diagramme. Ainsi, $\varphi_n(x) \in \text{Im}(h_{n+1})$. D'où le résultat, et $(H_*\varphi)_n$ est bien définie.

Montrons que H_* est un foncteur. On a que $H_*1_{G_n} = 1_{H_n}$ puisque $\overline{1_{G_n}(x)} = \bar{x}$ pour $\bar{x} \in \text{Ker}(g_n) / \text{Im}(g_{n+1})$. Il reste à vérifier que, pour $(G_n, g_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(H_n, h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(K_n, k_n)_{n \in \mathbf{N}}$ trois complexes de chaînes, et $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux morphismes de chaînes entre $(G_n, g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(H_n, h_n)_{n \in \mathbf{N}}$, et entre $(H_n, h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(K_n, k_n)_{n \in \mathbf{N}}$ respectivement, on ait $H_*(\varepsilon \circ \varphi) = H_*(\varepsilon) \circ H_*(\varphi)$. On note le morphisme $\varepsilon \circ \varphi = (\varepsilon_n \circ \varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Soit donc $\bar{x} \in \text{Ker}(g_n) / \text{Im}(g_{n+1})$, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} (H_*(\varepsilon \circ \varphi))_n(\bar{x}) &= \overline{(\varepsilon \circ \varphi)_n(x)} \\ &= \overline{\varepsilon_n \circ \varphi_n(x)} \\ &= \overline{\varepsilon_n(\varphi_n(x))} \\ &= (H_*\varepsilon)_n(\overline{\varphi_n(x)}) \\ &= (H_*\varepsilon)_n \circ (H_*\varphi)_n(\bar{x}). \end{aligned}$$

□

Grâce à ces deux propositions, on peut donner une des définitions centrales de l'homologie singulière.

Définition 13. Soit X un espace topologique. La suite de groupes abéliens donnée par $H_*(C_*(X))$ est appelée suite des **groupes d'homologie singulière** de X . On la note $H(X)$, et les éléments de la suite sont notés $H_n(X)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Si Y est un second espace topologique et $f : X \rightarrow Y$ une application continue, alors on appelle le morphisme $H_*(C_*f)$ le **morphisme induit** par f . On le note f_* , et les éléments de cette suite sont notés $(f_*)_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Si aucune confusion n'est à craindre, on pourra simplement noter ces éléments f_* également. C'est donc un morphisme de groupes de $H_n(X)$ dans $H_n(Y)$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on appelle $H_n(X) = \text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1})$ le **n -ième groupe d'homologie singulière**. Les éléments de $\text{Ker}(\partial_n)$ sont les **cycles**, et ceux de $\text{Im}(\partial_{n+1})$ sont les **bords**.

Aussi, pour des raisons de praticité, on pourra utiliser la notion d'**homologie réduite**, c'est-à-dire que pour un espace topologique non vide X , on considère la suite de groupes $(\tilde{H}_n(X))_{n \in \mathbf{N}}$, où $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $\tilde{H}_0(X) = \text{Ker}(\varepsilon) / \text{Im}(\partial_1)$, où $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbf{Z}$ est défini par

$$\varepsilon\left(\sum_{j \in I} n_j \sigma_j\right) = \sum_{j \in I} n_j.$$

On a donc que $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbf{Z}$.

On pourrait penser que cette définition est trop abstraite et trop large pour calculer les groupes d'homologie d'un espace topologique. Elle nous servira surtout pour des résultats forts que l'on démontrera dans la suite grâce aux bonnes propriétés qu'elle possède.

Cependant, un premier intérêt de l'homologie singulière est de décomposer l'étude de l'homologie d'un espace donné à celle de ses différentes composantes connexes par arcs, ce qui ramène à se restreindre à seulement l'étude des espaces connexes par arcs.

Proposition 3. Soit X un espace topologique, et $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ la liste de ses composantes connexes par arcs. Alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_\alpha).$$

Exemples.

1. Homologie d'un point. Si $X = \{x\}$ est un espace topologique formé d'un seul point, alors il y a un unique n -simplexe σ_n de X pour tout $n \geq 0$. Donc, dans le complexe de chaînes suivant :

$$\dots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X)$$

tous les groupes sont isomorphes à \mathbf{Z} . Si $n \geq 1$ est un entier, le morphisme de bord est donné par

$$\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} = \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i\right) \sigma_{n-1}$$

Donc, cette somme est nulle si n est impair et est égale à σ_{n-1} si n est pair. Par conséquent, on obtient le complexe suivant :

$$\dots \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{1_{\mathbf{Z}}} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{1_{\mathbf{Z}}} \dots \xrightarrow{1_{\mathbf{Z}}} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z}$$

Ainsi, si X est un singleton, alors le groupe $H_0(X)$ est isomorphe à \mathbf{Z} , et $H_n(X) = \{0\}$ pour tout entier $n \geq 1$. Et donc, $\tilde{H}_n(X) = \{0\}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2. Groupe d'homologie H_0 d'un espace connexe par arcs. Soit X un espace topologique connexe par arcs. Montrons que $H_0(X) \cong \mathbf{Z}$. Pour cela, posons

$$\begin{aligned} \varepsilon : C_0(X) &\rightarrow \mathbf{Z} \\ \sum_{i=1}^k n_i \sigma_i &\mapsto \sum_{i=1}^k n_i. \end{aligned}$$

C'est clairement un morphisme de \mathbf{Z} -modules surjectif; montrons alors qu'il induit un isomorphisme de $H_0(X)$ sur \mathbf{Z} . Pour cela, montrons que $\text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \partial_1$. Procédons donc par double inclusion.

Soit $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ un 1-simplexe singulier. Alors par définition de ∂_1 ,

$$\varepsilon(\partial_1(\sigma)) = \varepsilon(\sigma_{|[v_1]} - \sigma_{|[v_0]}) = 1 - 1 = 0.$$

Donc, par linéarité de ε et pour tout $\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$ élément de $C_1(X)$, on a

$$\varepsilon \circ \partial_1 \left(\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i \right) = \sum_{i=1}^k n_i \varepsilon \circ \partial_1(\sigma_i) = 0.$$

D'où $\text{Im } \partial_1 \subset \text{Ker } \varepsilon$.

Réciproquement, soit $\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$ un élément de $C_0(X)$ tel que

$$\varepsilon \left(\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i \right) = \sum_{i=1}^k n_i = 0.$$

Ici, les σ_i sont des applications de Δ^0 dans X , donc leur image est réduite à un seul point. C'est pourquoi on pourra identifier σ_i à un point $x_i \in X$. Soit $\gamma_i : [0; 1] \rightarrow X$ un chemin d'extrémités $x_0 \in X$ et σ_i . Soit σ_0 le 0-simplexe identifié à x_0 . Puisqu'on peut identifier $[0; 1]$ à Δ^1 , on peut alors voir γ_i comme un 1-simplexe singulier de X , et donc on a $\partial_1(\gamma_i) = \sigma_i - \sigma_0$. Donc par linéarité de ∂_1 , il vient

$$\partial_1 \left(\sum_{i=1}^k n_i \gamma_i \right) = \sum_{i=1}^k n_i \partial_1(\gamma_i) = \sum_{i=1}^k n_i \sigma_i - \left(\sum_{i=1}^k n_i \right) \sigma_0 = \sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$$

car $\sum_{i=1}^k n_i = 0$ par hypothèse. Ainsi, $\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$ a un antécédent par ∂_1 et $\text{Ker } \varepsilon \subset \text{Im } \partial_1$.

On conclut grâce au théorème d'isomorphisme.

De cet exemple et de la proposition précédente, on en déduit le résultat suivant :

Proposition 4. *Si X est un espace topologique non vide et connexe par arcs, alors $H_0(X) \cong \mathbf{Z}$. Par conséquent, pour tout espace topologique X , $H_0(X) \cong \bigoplus_{i=1}^{\alpha} \mathbf{Z}$, où α est le nombre de composantes connexes par arcs de X .*

Par propriétés fonctorielles de l'homologie, on peut énoncer un autre résultat, dit d'*invariance topologique*.

Proposition 5 (Invariance topologique). *Soient X et Y deux espaces topologiques. Si X et Y sont homéomorphes, alors $H_n(X)$ et $H_n(Y)$ sont isomorphes pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. Soit $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme. Puisque $H_* \circ C_*$ est un foncteur, on a en particulier

$$(f \circ f^{-1})_* = (1_Y)_* = 1_{H_* \circ C_*(Y)} = f_* \circ f_*^{-1} \quad \text{et} \quad (f^{-1} \circ f)_* = (1_X)_* = 1_{H_* \circ C_*(X)} = f_*^{-1} \circ f_*$$

donc f_* est bijectif. □

Ainsi, les groupes d'homologie singulière forment un invariant topologique, et donnent bien une condition nécessaire pour que deux espaces soient homéomorphes. Cependant, dans la section qui suit, on montre que l'invariant d'homologie singulière est aussi compatible à l'homotopie.

4.3.2 Invariance par homotopie

Théorème 2. Soient X et Y deux espaces topologiques. Soient f et g deux applications continues de X dans Y homotopes. Alors $f_* = g_*$.

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin de la notion suivante, qui est l'*homotopie algébrique*. Soient $f_{\#}$ et $g_{\#}$ deux morphismes entre $C_*(X)$ et $C_*(Y)$. On dit que $f_{\#}$ et $g_{\#}$ sont **algébriquement homotopes** s'il existe une application (vue comme collection d'applications linéaires)

$$k_{\#} = (k_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y))_{n \in \mathbf{N}}$$

telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \partial_{n+1} \circ k_n + k_{n-1} \circ \partial_n = (g_{\#})_n - (f_{\#})_n.$$

La relation d'homotopie entre morphismes est une relation d'équivalence, comme pour les applications continues. Alors la démonstration vient des deux résultats suivants :

Lemme 1. Soient f et g deux applications continues de X dans Y homotopes. Alors les morphismes $f_{\#}$ et $g_{\#}$ sont homotopes.

Lemme 2. Soient $f_{\#}$ et $g_{\#}$ deux morphismes entre $C_*(X)$ et $C_*(Y)$ homotopes. Alors $H_* f_{\#} = H_* g_{\#}$.

Démonstration du lemme 2. Soit $k_{\#}$ une homotopie entre $f_{\#}$ et $g_{\#}$. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \text{Ker}(\partial_n)$ un n -cycle de X . Alors

$$(g_{\#})_n(x) - (f_{\#})_n(x) = \partial_{n+1} \circ k_n(x) + k_{n-1} \circ \partial_n(x) = \partial_{n+1} \circ k_n(x),$$

ce qui veut dire que les classes de $(f_{\#})_n(x)$ et $(g_{\#})_n(x)$ sont les mêmes dans $H_n(X)$. D'où $H_* f_{\#} = H_* g_{\#}$. \square

Ainsi, si f et g sont continues et homotopes de X dans Y , alors $f_{\#}$ et $g_{\#}$ sont algébriquement homotopes par le lemme 1, et donc $f_* = H_* f_{\#} = H_* g_{\#} = g_*$ par le lemme 2. \square

Grâce à ce théorème, on a un nouveau critère de classification des espaces topologiques.

Corollaire 1. Soient X et Y deux espaces topologiques. Si f et g définissent une équivalence d'homotopie, alors elles induisent un isomorphisme entre $H_n(X)$ et $H_n(Y)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Démonstration. En notant \sim la relation d'équivalence d'homotopie, on a que $f \circ g \sim 1_Y$ et $g \circ f \sim 1_X$. Ainsi, par functorialité en homologie, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(f \circ g)_* = f_* \circ g_* = (1_Y)_* = 1_{H_n(Y)}$, et $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* = (1_X)_* = 1_{H_n(X)}$. D'où $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ et $g_* : H_n(Y) \rightarrow H_n(X)$ sont isomorphes. \square

On déduit de ces résultats que si X est un espace contractile, alors puisque l'homologie réduite d'un point est nulle, $\tilde{H}_n(X) = \{0\}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4.4 Homologie relative

Dans la section 3, on a donné quelques exemples d'espaces obtenus par recollements. Ce principe étant souvent utilisé, il est naturel de vouloir étudier l'homologie d'un espace relativement à un sous-espace. C'est pourquoi on donne les définitions suivantes.

Définition 14. Soit X un espace topologique. Une **paire** d'espaces est un couple (X, A) , où A est un sous-espace de X . On a alors l'inclusion $C_n(A) \subset C_n(X)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et on pose :

$$C_n(X, A) = C_n(X) / C_n(A).$$

Les éléments de $C_n(X, A)$ sont appelés les **cycles relatifs**, et si sa classe est celle de 0, alors on dit que c'est un **bord relatif**.

Grâce à cette définition, on peut définir la catégorie des paires d'espaces topologiques, dont un morphisme entre deux paires (X, A) et (Y, B) est une application continue $f : X \rightarrow Y$ telle que $f(A) \subset B$.

D'autre part, on peut montrer que $(C_n(X, A))_{n \in \mathbf{N}}$ est un complexe de chaînes, avec les applications de bord quotient induites par les applications de bord ∂_n précédentes. Ainsi, on peut aussi voir les complexes de chaînes de paires d'espaces topologiques comme l'image de (X, A) par le

foncteur, aussi noté C_* qui à (X, A) associe $(C_n(X, A), \partial_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 6. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la suite exacte courte (cf. annexe A) suivante :

$$\{0\} \longrightarrow C_n(A) \xrightarrow{i_\#} C_n(X) \xrightarrow{j_\#} C_n(X, A) \longrightarrow \{0\}$$

où $i_\#$ est l'application induite par l'inclusion $i : A \rightarrow X$ et $j_\#$ est l'application induite par la projection $j : X \rightarrow X/A$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque i est l'inclusion, cela induit $i_\#$ comme inclusion canonique. De même, $j_\#$ est l'application quotient de $C_n(X)$ par $C_n(A)$. Donc $\text{Im } i_\# = C_n(A) = \text{Ker } j_\#$ et la suite est exacte. \square

Ainsi, grâce à cette suite exacte courte, on peut créer une **suite exacte courte de complexes de chaînes**, définie par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\ \dots & \longrightarrow & C_{n+1}(A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(A) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(A) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow i_\# & & \downarrow i_\# & & \downarrow i_\# \\ \dots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow j_\# & & \downarrow j_\# & & \downarrow j_\# \\ \dots & \longrightarrow & C_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\ & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} \end{array}$$

Définition 15. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Alors l'image $H_*(C_*(X, A))$ s'appelle la suite des **groupes d'homologie relative** de (X, A) . Ses éléments sont notés $H_n(X, A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme pour l'homologie singulière, on peut définir une notion d'homologie relative *réduite*, notée encore $\tilde{H}_n(X, A)$.

On remarque que comme les carrés du diagramme précédent sont commutatifs, $i_\#$ et $j_\#$ sont des applications de chaînes, et donc induisent des applications i_* et j_* en homologie. À partir de la suite exacte courte de complexes de chaînes définie précédemment, on obtient alors une suite exacte longue entre les groupes d'homologie.

Théorème 3. Pour toute paire (X, A) et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un morphisme

$$d : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$$

tel que la suite longue

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{d} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

est exacte.

Démonstration. La preuve repose sur la méthode dite de chasse au diagramme. Les détails sont donnés dans [4, p. 116, 117].

Décrivons tout de même le morphisme d , appelé *connectant*. Un cycle dans $C_n(X, A)$ peut être représenté par une chaîne $\alpha \in C_n(X)$ dont le bord $\partial\alpha$ est contenu dans $C_{n-1}(A)$. La classe de $\partial\alpha$ dans $H_{n-1}(A)$ ne dépend que de la classe de α modulo $C_n(A)$. On définit donc d comme étant le morphisme qui associe à chaque cycle dans $C_n(X, A)$ la classe d'homologie de son bord dans $C_{n-1}(A)$. \square

On peut montrer que ces résultats restent encore valables dans le cas de l'homologie relative

réduite. En particulier, si $A \neq \emptyset$, alors $\tilde{H}_n(X, A) = H_n(X, A)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Si de plus, A vérifie certaines propriétés, on a le résultat suivant, qui relie l'homologie relative et l'homologie « absolue ».

Théorème 4 (écrasement). *Soit X un espace topologique, A un fermé de X , rétracte par déformation (cf. annexe B) d'un voisinage ouvert de A . On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$:*

$$H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$$

Avec les mêmes hypothèses sur X et A , la suite exacte longue d'homologie relative devient la suivante :

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{d} \tilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \dots \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow \{0\}$$

Cela montre donc le lien entre le quotient des complexes de chaînes et le complexe de chaînes du quotient.

Grâce à toutes ces considérations, on peut enfin faire quelques calculs concrets d'homologie, calculs qui deviennent très rapides.

Exemples.

1. Homologie de la sphère. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En considérant la paire $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$, de telle sorte que $X/A = S^n$, on peut calculer les groupes d'homologie de S^n . Pour $k \in \mathbf{N}$, on a $\tilde{H}_k(D^n) = \{0\}$ puisque D^n est contractile. Alors la suite exacte longue d'homologie relative devient

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_k(S^{n-1}) \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \tilde{H}_k(S^n) \xrightarrow{d_k} \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \dots \longrightarrow \tilde{H}_0(S^n) \xrightarrow{d_0} \{0\}$$

Cette suite étant exacte, il s'ensuit que les applications $d_k : \tilde{H}_k(S^n) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$ sont des isomorphismes ($\text{Ker } d_k = \text{Im } 0 = \{0\}$ donc d_k est injective et $\text{Im } d_k = \text{Ker } 0 = \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$, donc d_k est surjective) et $\tilde{H}_0(S^n) = \{0\}$ pour $n \geq 1$ (car S^n a une composante connexe)^a.

Montrons alors le résultat final par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall k \in \mathbf{N}, H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}^2 & \text{si } n = k = 0, \\ \mathbf{Z} & \text{si } n = k \text{ ou } k = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $n = 0$, alors $H_0(S^0) \cong \mathbf{Z}^2$ car S^0 a deux composantes connexes. Pour $k \geq 1$, on a $C_k(S^0) = \{0\}$, donc $H_k(S^0) = \{0\}$ et la propriété est vérifiée. Si c'est vrai au rang $n \in \mathbf{N}$, alors on a $\tilde{H}_{n+1}(S^{n+1}) \cong \tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$ par hypothèse de récurrence. Mais si $k \neq n + 1$, alors on a $\tilde{H}_k(S^{n+1}) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^n) = \{0\}$ car $k - 1 \neq n$. Si $k > 0$, on a $\tilde{H}_k(S^n) = H_k(S^n)$ donc la propriété est vérifiée. Pour $k = 0$, on a $\tilde{H}_0(S^n) = \{0\}$ si $n \geq 1$, c'est-à-dire $H_0(S^n) \cong \mathbf{Z}$, ce qui conclut les calculs.

On remarque qu'on trouve les mêmes groupes d'homologie que le cas $n = 2$ en homologie simpliciale. Mais on voit un net avantage : on a pu très facilement généraliser le résultat.

2. Théorème du point fixe de Brouwer. Nous avons vu en introduction que le groupe fondamental ne permet pas la démonstration du théorème du point fixe de Brouwer pour $n > 2$. Grâce au foncteur homologie, on peut alors démontrer pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ ce théorème. En effet, $\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \neq \{0\}$ et $\tilde{H}_{n-1}(D^n) = \{0\}$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

a. Ne pas confondre avec $H_0(S^n)$ qui est isomorphe à \mathbf{Z} .

Enfin, donnons le résultat suivant qui nous assure que, comme pour l'homologie singulière, l'homologie relative est invariante par homotopie.

Proposition 7. *Soient (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques. Soient f et g deux morphismes de la catégorie des paires d'espaces topologiques entre (X, A) et (Y, B) . Si f et g sont homotopes, alors ils induisent le même morphisme $f_* = g_*$ entre groupes d'homologie.*

On peut même aller plus loin, en montrant que l'homologie simpliciale et l'homologie singulière sont en fait équivalentes pour les espaces munis de Δ -complexes. On peut en effet suivre la même construction que l'homologie singulière relative dans le cadre de l'homologie simpliciale, et on a le théorème suivant.

Théorème 5. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques munis d'une structure de Δ -complexe. Alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, H_n^\Delta(X, A) \cong H_n(X, A),$$

où $H_n^\Delta(X, A)$ est le n -ième groupe d'homologie simpliciale relative, dont les groupes de n -chaînes sont définis par $\Delta_n(X, A) = \Delta_n(X)/\Delta_n(A)$.

Pour la preuve de ce théorème, voir l'annexe D.

Ainsi, pour les Δ -complexes, tous les exemples avec des calculs « à la main » ont les mêmes résultats en homologie singulière.

5 Application : suite de Mayer-Vietoris

5.1 Définition

Une application importante de l'homologie est ce qu'on appelle la suite de Mayer-Vietoris, qui permet de calculer les groupes d'homologie d'un espace topologique en le découpant en morceaux plus simples. Plus précisément, la suite relie les groupes d'homologie de l'espace aux groupes d'homologie d'une paire de sous-espaces qui le recouvrent par une suite exacte.

Proposition 8. Soit X un espace topologique. Soient U et V deux ouverts de X tels que $X = U \cup V$. Alors, il existe une suite exacte longue de modules, dite **suite exacte de Mayer-Vietoris** de X ,

$$\dots \longrightarrow H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\Psi} H_n(X) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\Phi} H_{n-1}(U) \oplus H_{n-1}(V) \longrightarrow \dots$$

Démonstration. On donne seulement les idées principales de la démonstration. Pour plus de détails, voir [4, p. 149, 150] ou [11]. Il suffit de construire les morphismes Ψ , δ et Φ . Soit $n \in \mathbf{N}$.

Construction de Ψ . Puisqu'on a deux injections respectives de U dans X et de V dans X , alors cela induit deux morphismes en homologie $i_U : H_n(U) \rightarrow H_n(X)$ et $i_V : H_n(V) \rightarrow H_n(X)$. Posons

$$\begin{aligned} \Psi : H_n(U) \oplus H_n(V) &\rightarrow H_n(X) \\ \alpha \oplus \beta &\mapsto i_U(\alpha) + i_V(\beta). \end{aligned}$$

Construction de δ . Posons $N : H_n(X) \rightarrow H_n(X, V)$ l'application naturelle. X étant recouvert par $U \cup V$, le théorème des petites chaînes^a nous donne un isomorphisme S entre $H_n(X, V)$ et $H_n(X^{\{U, V\}}, V) \cong H_n(U, U \cap V)$ (le dernier isomorphisme provenant d'un théorème appelé *théorème d'excision*, voir [4, Th. 2.20, p. 119]). Et, on a le connectant $\delta : H_n(U, U \cap V) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V)$ de la suite exacte longue associée à la paire $(U, U \cap V)$. Alors, on définit δ en composant ces trois applications, i.e. $\delta = \delta \circ S \circ N$.

Construction de Φ . De même qu'avec Ψ , on a deux injections respectives de $U \cap V$ dans U et de $U \cap V$ dans V , ce qui induit aussi deux morphismes $\iota_U : H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U)$ et $\iota_V : H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(V)$. On pose

$$\begin{aligned} \Phi : H_n(U \cap V) &\rightarrow H_n(U) \oplus H_n(V) \\ \gamma &\mapsto \iota_U(\gamma) \oplus (-\iota_V(\gamma)). \end{aligned}$$

Exactitude de la suite. On peut remarquer que la suite de Mayer-Vietoris est la suite exacte longue de groupes d'homologie associée à la suite exacte courte de complexes de chaînes suivant :

$$\{0\} \longrightarrow C_n(U \cap V) \xrightarrow{\Phi} C_n(U) \oplus C_n(V) \xrightarrow{\Psi} C_n(X^{\{U, V\}}) \longrightarrow \{0\}$$

où le connectant de cette suite exacte longue correspond bien au morphisme δ défini plus haut. Pour terminer cette démonstration, on utilise le théorème des petites chaînes qui dit que $H_n(X^{\{U, V\}}) \cong H_n(X)$. \square

^a C'est un théorème admis, dont on donne l'énoncé ci-après. Pour un espace topologique X et un recouvrement $(U_\alpha)_\alpha$ de X , on note $C_n(X^{\{U_\alpha\}})$ le sous-complexe de $C_n(X)$ engendré par les simplexes singuliers d'image contenue dans un des U_α . Voici le théorème : L'inclusion $C_n(X^{\{U_\alpha\}}) \hookrightarrow C_n(X)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ induit un isomorphisme $H_n(X^{\{U_\alpha\}}) \cong H_n(X)$ en homologie.

Donnons maintenant quelques exemples d'utilisation de cette suite.

5.2 Calcul de groupes d'homologie

5.2.1 Retour sur l'homologie de S^2

Essayons de calculer, *via* la suite de Mayer-Vietoris, l'homologie de S^2 . Pour cela, on supposera seulement connue l'homologie du point et du cercle S^1 . On commence par placer deux points diamétralement opposés sur S^2 , deux pôles, N (pour « pôle nord ») et S (pour « pôle sud »). Avec ceci, on recouvre S^2 par les deux ouverts $U = S^2 \setminus \{N\}$ et $V = S^2 \setminus \{S\}$.

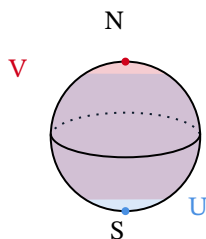


Figure 11. Recouvrement de S^2

Puisque U et V sont contractiles, ils ont les mêmes groupes d'homologie, à savoir ceux du point. De plus, $U \cap V$ se rétracte sur l'« équateur » de S^2 , à savoir un cercle. Donc les groupes d'homologie de $U \cap V$ sont ceux de S^1 . Donc pour $n \geq 2$, on a $H_n(S^1) = \{0\}$, et $H_1(S^1) \cong \mathbf{Z} \cong H_0(S^1)$; et pour $n \geq 1$, on a $H_n(\{N\}) = H_n(\{S\}) = \{0\}$ et $H_0(\{N\}) \cong H_0(\{S\}) \cong \mathbf{Z}$. On peut donc écrire la suite exacte longue de Mayer-Vietoris :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & H_3(S^2) & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & H_2(S^2) \\ & & & & & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & & & & & \mathbf{Z} \\ & & & & & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & & & & & \mathbf{Z} \\ & & & & & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & & & & & \mathbf{Z}^2 \\ & & & & & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & & & & & H_0(S^2) \\ & & & & & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & & & & & \{0\} \end{array}$$

Pour tout $n \geq 3$, on a la suite $\{0\} \rightarrow H_n(S^2) \rightarrow \{0\}$, et donc par exactitude $H_n(S^2) = \{0\}$. Regardons pour $n \leq 2$.

- On a la suite $\mathbf{Z} \xrightarrow{h} \mathbf{Z}^2 \xrightarrow{g} H_0(S^2) \xrightarrow{f} \{0\}$. Ainsi, on a $H_0(S^2) = \text{Ker } f = \text{Im } g$. Avec les notations de la proposition précédente, on a $h = \Phi$ défini par $h(x) = (x, -x)$. Donc $\text{Im } h = (1, -1)\mathbf{Z} = \text{Ker } g$, et donc $H_0(S^2) = \text{Im } g \cong \mathbf{Z}^2 / \text{Ker } g = \mathbf{Z}^2 / (1, -1)\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}$.
- Ensuite, on a la suite $\{0\} \xrightarrow{h} H_1(S^2) \xrightarrow{g} \mathbf{Z} \xrightarrow{f} \mathbf{Z}^2$. Ainsi, on a $\text{Ker } g = \text{Im } h = \{0\}$, donc g est injective, et donc $H_1(S^2) \cong \text{Im } g = \text{Ker } f$. Par les notations de la proposition précédente, on a $f = \Phi$ définie par $f(x) = (x, -x)$, donc de noyau réduit à 0. D'où $H_1(S^2) = \{0\}$.
- Enfin, on a la suite $\{0\} \xrightarrow{h} H_2(S^2) \xrightarrow{g} \mathbf{Z} \xrightarrow{f} \{0\}$. Ainsi, on a $\text{Ker } g = \text{Im } h = \{0\}$, ce qui veut dire que g est injective. Donc $H_2(S^2) \cong \text{Im } g = \text{Ker } f = \mathbf{Z}$.

On retrouve donc bien l'homologie de la sphère S^2 déterminée plus haut. De plus, par récurrence, on peut calculer par cette méthode tous les groupes d'homologie de S^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

5.2.2 Homologie du tore

Choisissons de recouvrir le tore T^2 par deux « demi-tores » ouverts U et V. Topologiquement, on peut voir ces deux ouverts comme des cylindres, et donc U et V ont la même homologie que le cercle puisqu'ils se rétractent chacun sur le cercle.

On a donc, $H_n(U) = H_n(V) = \{0\}$ pour $n \geq 2$, et $H_n(U) \cong H_n(V) \cong \mathbf{Z}$ pour $n = 0$ et $n = 1$. Ainsi par la suite de Mayer-Vietoris, pour $n \geq 3$, on a que $\{0\} \rightarrow H_n(T^2) \rightarrow \{0\}$. Ainsi, $H_n(T^2) = \{0\}$ pour $n \geq 3$, et

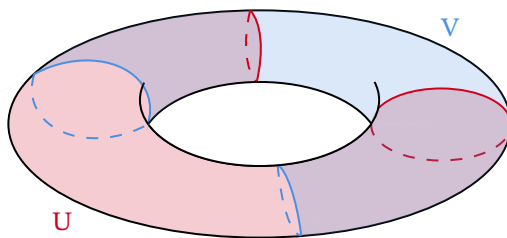


Figure 12. Recouvrement de T^2

pour $n \leq 2$, on a :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & H_2(T^2) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H_1(U \cap V) & \longrightarrow & H_1(U) \oplus H_1(V) \longrightarrow H_1(T^2) \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H_0(U \cap V) & \longrightarrow & H_0(U) \oplus H_0(V) \longrightarrow H_0(T^2) \longrightarrow \{0\}
 \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\{0\} \longrightarrow H_2(T^2) \longrightarrow \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \mathbf{Z}^2 \longrightarrow H_1(T^2) \longrightarrow \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \mathbf{Z}^2 \longrightarrow H_0(T^2) \longrightarrow \{0\}$$

Comme le tore T^2 est connexe par arcs, on a que $H_0(T^2) \cong \mathbf{Z}$.

Étudions le morceau de suite suivant :

$$\dots \longrightarrow \{0\} \longrightarrow H_2(T^2) \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z}^2 \xrightarrow{\Phi} \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \dots$$

On a que l'intersection $U \cap V$ est composée de deux cylindres disjoints. On a donc deux générateurs, α et β , pour $H_1(U \cap V)$ qui correspondent à un cercle sur chacun des deux cylindres. Ainsi, on peut voir $H_1(U \cap V)$ et $H_1(U) \oplus H_1(V)$ comme le groupe $\mathbf{Z}\langle\alpha\rangle \oplus \mathbf{Z}\langle\beta\rangle$. On a donc :

$$\Phi : \mathbf{Z}\langle\alpha\rangle \oplus \mathbf{Z}\langle\beta\rangle \rightarrow \mathbf{Z}\langle\alpha\rangle \oplus \mathbf{Z}\langle\beta\rangle$$

Ainsi, $\Phi(\alpha, 0) = \Phi(0, \beta) = (\alpha, \beta)$, puisque $\alpha = \beta$ dans $H_1(U)$ et $H_1(V)$.

L'application Φ est donc donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, qui après changement de base devient $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient alors par le théorème d'isomorphisme et par exactitude de la suite, $H_2(T^2) = H_2(T^2)/\text{Ker}(\partial) \cong \text{Im}(\partial) = \text{Ker}(\Phi) \cong \mathbf{Z}$. Reste à comprendre $H_1(T^2)$. Étudions donc la suite :

$$\dots \longrightarrow \mathbf{Z}^2 \xrightarrow{\Phi} \mathbf{Z}^2 \xrightarrow{\Psi} H_1(T^2) \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z}^2 \xrightarrow{\Phi} \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \dots$$

On a que Φ est donnée par la même matrice que précédemment, à savoir $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Et, on a la suite exacte courte suivante (cf. annexe A) :

$$\{0\} \longrightarrow \text{Ker}(\partial) \longrightarrow H_1(T^2) \longrightarrow \text{Im}(\partial) \longrightarrow \{0\}$$

Avec, $\text{Ker}(\partial) = \text{Im}(\Psi) \cong \mathbf{Z}^2 / \text{Ker}(\Psi) = \mathbf{Z}^2 / \text{Im}(\Phi) = \mathbf{Z}^2 / \mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}$ et $\text{Im}(\partial) = \text{Ker}(\Phi) = \mathbf{Z}$. La suite exacte courte devient donc :

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow H_1(T^2) \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \{0\}$$

Ainsi, puisque \mathbf{Z} est libre de type fini, cette suite exacte courte est scindée. Donc, par scindage en biproduit de cette suite exacte courte, par le *Splitting lemma* (cf. annexe A), on a que $H_1(T^2) \cong \text{Ker}(\partial) \oplus \text{Im}(\partial) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^2$. Donc, $H_1(T^2) \cong \mathbf{Z}^2$.

Finalement, on trouve que :

- $H_0(\mathbb{T}^2) \cong H_2(\mathbb{T}^2) \cong \mathbf{Z}$;
- $H_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbf{Z}^2$;
- $H_n(\mathbb{T}^2) = \{0\}$ pour $n \geq 3$.

On a vu que toute surface fermée (compacte, sans bord) connexe et orientable de \mathbf{R}^3 est homéomorphe à une surface de genre X_g orientable pour un certain $g \in \mathbf{N}$ (cf. section 3.3). Or, grâce à des méthodes similaires à celles faites dans ces deux exemples (et par récurrence), on est capable de calculer les groupes d'homologie de telles surfaces. On obtient alors, en remarquant que $X_0 = S^2$ et $X_1 = \mathbb{T}^2$:

- $H_0(X_g) \cong H_2(X_g) \cong \mathbf{Z}$;
- $H_1(X_g) \cong \mathbf{Z}^{2g}$;
- $H_n(X_g) = \{0\}$ pour $n \geq 3$.

On peut par conséquent déterminer si deux de ces surfaces ne sont pas homéomorphes.

Le but de ce mémoire a été d'introduire plusieurs méthodes pour distinguer les espaces topologiques entre eux, comme l'homotopie, le groupe fondamental, et l'homologie. Or, on peut se demander si des résultats plus fins pourraient être obtenus en généralisant certaines théories exposées ici. Une idée naturelle qui vient est de vouloir considérer des coefficients différents pour les groupes d'homologie, sans se cantonner à \mathbf{Z} . C'est l'objet d'étude de l'homologie dite à *coefficients*; on considère alors des coefficients dans un groupe G quelconque. L'intérêt de cette généralisation est que dans certaines situations, choisir des coefficients dans un groupe particulier permet d'obtenir plus d'informations que dans \mathbf{Z} . Et, même si le calcul de ces groupes d'homologie à coefficients est plus compliqué, il peut être ramené, grâce au théorème des coefficients universels, au calcul d'homologie dans \mathbf{Z} , qui est lui généralement plus simple.

Annexes

A Suites exactes

Définition. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de groupes. Soit la suite d'homomorphismes suivante :

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

On dit que cette suite est **exacte** si $\text{Ker}(\alpha_n) = \text{Im}(\alpha_{n+1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. L'inclusion $\text{Im}(\alpha_{n+1}) \subset \text{Ker}(\alpha_n)$ est équivalente à dire que $\alpha_n \circ \alpha_{n+1} = 0$, ce qui fait de la suite précédente un complexe de chaînes.

Donnons quelques exemples simples de telles suites exactes, ainsi que quelques propriétés qui en découlent.

Proposition. Soient A, B , et C trois groupes.

- La suite $\{0\} \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ est exacte si et seulement $\text{Ker}(\alpha) = \{0\}$, i.e. α est injectif.
- La suite $A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow \{0\}$ est exacte si et seulement $\text{Im}(\alpha) = B$, i.e. α est surjectif.
- La suite $\{0\} \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow \{0\}$ est exacte si et seulement α est un isomorphisme.
- La suite $\{0\} \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow \{0\}$ est exacte si et seulement α est injectif, β est surjectif, et $\text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$. Donc β induit un isomorphisme $C \cong B / \text{Im}(\alpha) = B/A$, si l'on voit α comme l'inclusion de A dans B en tant que sous-groupe.

Définition. On appelle **suite exacte courte** une suite exacte de la forme

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow \{0\}$$

Lorsqu'on a une suite exacte *longue*

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

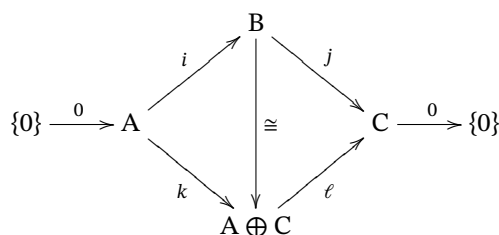
on peut se ramener à ne considérer que des suites exactes courtes, pour chaque $n \in \mathbb{N}$:

$$\{0\} \xrightarrow{0} \text{Ker}(\alpha_n) \xrightarrow{i} A_n \xrightarrow{\alpha_n} \text{Im}(\alpha_n) \xrightarrow{0} \{0\}$$

avec i l'application inclusion, qui est évidemment injective, et α_n est bien surjective sur son image.

Proposition (Splitting lemma). Soit $\{0\} \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow \{0\}$ une suite exacte courte de groupes abéliens. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe un morphisme de groupes $p : B \rightarrow A$ tel que $poi = 1_A$.
- (ii) Il existe un morphisme de groupes $s : C \rightarrow B$ tel que $j \circ s = 1_C$.
- (iii) Le groupe B est isomorphe à $A \oplus C$ et le diagramme suivant est commutatif :



où $k : a \mapsto (a, 0)$ et $\ell : (a, c) \mapsto c$ sont les applications canoniques.

Une suite exacte courte vérifiant l'une des trois conditions de la proposition précédente est dite **scindée**.

Proposition. Soit la suite exacte courte de groupes abéliens suivante :

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow \{0\}$$

Si C est libre de type fini alors la suite exacte est scindée.

Théorème (Lemme des cinq). Supposons que dans le diagramme commutatif suivant, les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{\ell} & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{\ell'} & E' \end{array}$$

Si α, β, δ et ε sont des isomorphismes, alors γ est également un isomorphisme.

Démonstration. Pour prouver le résultat, il suffit en fait de montrer que :

- si β et δ sont surjectifs, et ε est injectif, alors γ est surjectif;
- si β et δ sont injectifs, et α est surjectif, alors γ est injectif.

La preuve repose sur la méthode dite de chasse au diagramme. Notons tous les groupes additivement, et par abus de notations, tous les éléments neutres des groupes 0.

Montrons le premier point. Soit $c' \in C'$. On cherche un antécédent de c' par γ . On a que $k'(c') \in D'$, et par surjectivité de δ , il existe $d \in D$ tel que $k'(c') = \delta(d)$. Par commutativité du dernier carré, on a alors que $\varepsilon(\ell(d)) = \ell'(\delta(d))$, et donc $\varepsilon(\ell(d)) = \ell'(k'(c')) = 0$ par exactitude de la ligne inférieure du diagramme. Mais ε est injectif, donc on en déduit que $\ell(d) = 0$, et $d \in \text{Ker}(\ell) = \text{Im}(k)$, i.e. il existe $c \in C$ tel que $k(c) = d$. Donc $k'(\gamma(c)) = \delta(k(c)) = \delta(d)$ par commutativité du diagramme. Donc $k'(c' - \gamma(c)) = k'(c') - k'(\gamma(c)) = \delta(d) - \delta(d) = 0$. Donc $c' - \gamma(c) \in \text{Ker}(k') = \text{Im}(j')$; il existe alors $b' \in B'$ tel que $j'(b') = c' - \gamma(c)$, et par surjectivité de β , il existe $b \in B$ tel que $\beta(b) = b'$. Alors, toujours par commutativité, on a que $\gamma(j(b)) = j'(\beta(b)) = j'(b') = c' - \gamma(c)$. Par conséquent, $\gamma(c + j(b)) = \gamma(c) + \gamma(j(b)) = \gamma(c) + c' - \gamma(c) = c'$. Donc on a trouvé un antécédent de c' par γ , d'où γ est surjectif.

Montrons maintenant le second point. Soit $c \in C$ tel que $\gamma(c) = 0$, montrons que $c = 0$. On a $0 = k'(\gamma(c)) = \delta(k(c))$ par commutativité, donc $k(c) = 0$ puisque δ est injectif. Ainsi, $c \in \text{Ker}(k) = \text{Im}(j)$ par exactitude de la ligne supérieure du diagramme, et il existe alors $b \in B$ tel que $j(b) = c$. Donc $j'(\beta(b)) = \gamma(j(b)) = \gamma(c) = 0$, d'où $\beta(b) \in \text{Ker}(j') = \text{Im}(i')$ et il existe $a' \in A'$ tel que $i'(a') = \beta(b)$. Mais α est surjectif donc il existe $a \in A$ tel que $\alpha(a) = a'$, et par commutativité du diagramme on a que $\beta(i(a)) = i'(\alpha(a)) = i'(a') = \beta(b)$. Comme β est injectif, on obtient que $i(a) = b$, et par exactitude de la ligne supérieure du diagramme, on a $0 = j(i(a)) = j(b) = c$. D'où l'injectivité de γ puisqu'on a obtenu $c = 0$.

γ est donc injectif et surjectif, c'est un isomorphisme. □

B Compléments topologiques

Voici quelques définitions laissées de côté dans le corps de ce mémoire.

Définition. Soit X un espace topologique séparé^a, à base dénombrable^b. On dit que X est une **variété topologique** de dimension $n \in \mathbb{N}$ si tout point de X admet un voisinage homéomorphe à un ouvert \mathbb{R}^n , ou encore que X est recouvert par des ouverts homéomorphes à des ouverts de \mathbb{R}^n .

^a. C'est-à-dire un espace dont, pour toute paire de points distincts, il existe pour chacun de ces deux points un voisinage dont leur intersection est vide.

^b. Une *base* d'ouverts d'un espace topologique est une collection d'ouverts telle que tout élément de la topologie de cet espace soit la réunion des éléments de cette collection.

Définition. Soient X un espace topologique, Y un sous-espace de X et $i : Y \rightarrow X$ l'injection canonique.

On dit qu'une application $r : X \rightarrow Y$ est une **rétraction** de X sur Y si r est continue et $roi = 1_Y$.

On dit qu'une application $r : X \rightarrow Y$ est une **rétraction par déformation** de X sur Y si r est une rétraction et si $i \circ r$ est homotope à 1_X .

On dit que Y est un **rétracte** de X s'il existe une rétraction de X sur Y .

On dit que Y est un **rétracte par déformation** de X s'il existe une rétraction par déformation de X sur Y .

C Groupes libres et théorème de van Kampen

Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de groupes. Quitte à les remplacer par $G_i \times \{i\}$, on peut les supposer tous disjoints. Notons $X = \bigcup_{i \in I} G_i$ et soit $\{1\}$ un singleton disjoint de X . On appelle **mot**

formé des $(G_i)_{i \in I}$ une suite d'éléments $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où chaque a_n est dans l'un des G_i ou dans $\{1\}$, et telle qu'à partir d'un certain rang k , on ait $a_n = 1$ pour tout $n \geq k$. Par exemple, si $I = \{1, 2\}$ et $g_1 \in G_1$ et $g_2 \in G_2$, la suite $(g_1, g_2, g_2, g_1, g_1^{-1}, g_2^2, 1, \dots)$, qu'on notera plus simplement $g_1 g_2 g_2 g_1 g_1^{-1} g_2^2$ est un mot formé de G_1 et G_2 .

De plus, un mot $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dit **réduit** si

- (i) aucun des a_n n'est l'élément neutre d'un des G_i ;
- (ii) deux éléments consécutifs a_n et a_{n+1} ne sont pas dans le même G_i ;
- (iii) si $a_k = 1$, alors $a_n = 1$ pour tout $n \geq k$.

Dans l'exemple précédent, le mot n'est pas réduit car deux éléments consécutifs $g_2 g_2$ sont dans le même groupe. Par contre, le mot $(1, 1, \dots)$, noté $\{\}$ est un mot réduit, appelé le **mot vide**. Notons $G = \bigast_{i \in I} G_i$ l'ensemble de tous les mots réduits formés des $(G_i)_{i \in I}$. Munissons-le de la loi de concaténation $*$, c'est-à-dire pour tous mots réduits $(a_1, \dots, a_k, 1, \dots)$ et $(b_1, \dots, b_\ell, 1, \dots)$,

$$(a_1, \dots, a_k, 1, \dots) * (b_1, \dots, b_\ell, 1, \dots) = (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell, 1, \dots).$$

Puisque cette loi peut ne pas donner un mot réduit, on lui impose les conditions de réductions suivantes, pour a_1 et a_2 des éléments de X :

$$(a_1, 1, \dots) * \{\} = (a_1, 1, \dots), \quad (a_1, 1, \dots) * (a_1^{-1}, 1, \dots) = \{\}$$

et $(a_1, 1, \dots) * (a_2, 1, \dots) = (b, 1, \dots)$ si a_1 et a_2 sont dans le même groupe et $b = a_1 a_2$.

Alors $(G, *)$ est un groupe. En effet, $\{\}$ est l'élément neutre, et pour $(a_1, \dots, a_n, 1, \dots) \in G$, son inverse est $(a_n^{-1}, \dots, a_1^{-1}, 1, \dots)$. L'associativité est aussi vérifiée, mais est bien moins évidente. Elle utilise un (long) procédé dit de *van der Waerden*, et on l'admet ici. Vérifions plutôt que G est bien la somme des $(G_i)_{i \in I}$ dans la catégorie des groupes.

Pour tout $i \in I$, notons $\varphi_i : G_i \rightarrow G$ les morphismes canoniques. Montrons donc que pour tout groupe $X \in \mathbf{Gr}$ et $(f_i)_{i \in I} \in F(X)$ (F étant le foncteur donné dans la définition de la somme en 2.3), il existe un unique morphisme $f : G \rightarrow X$ tel que pour tout $i \in I$, $f_i = f \circ \varphi_i$. En effet, posons

$$f : \bigast_{i \in I} G_i \rightarrow X \cup \{1\}$$

$$a_1 \dots a_k \mapsto f_{i_1}(a_1) \dots f_{i_k}(a_k),$$

en notant i_ℓ l'indice du groupe auquel appartient a_ℓ . On a donc bien $f_i = f \circ \varphi_i$ pour tout $i \in I$ (car $x_i \in G_i$ est envoyé sur $(x_i, 1, \dots)$ dans G par φ_i , et est donc envoyé sur $f_{i_i}(x_i)$ dans G par f). Montrons que c'est bien un morphisme de groupes. Pour des mots $(x_1, \dots, x_k, 1, \dots)$ et $(y_1, \dots, y_\ell, 1, \dots)$ dans G , notons $s \leq \min(k, \ell)$ le plus grand entier tel qu'on ait ces mots de la forme

$$(x_1, \dots, x_k, 1, \dots) = (x_1, \dots, x_{k-s}, z_1, \dots, z_s, 1, \dots),$$

$$(y_1, \dots, y_\ell, 1, \dots) = (z_s^{-1}, \dots, z_1^{-1}, y_{s+1}, \dots, y_\ell, 1, \dots).$$

Alors le produit de ces mots donne

$$(x_1, \dots, x_k, 1, \dots) * (y_1, \dots, y_\ell, 1, \dots) = (x_1, \dots, x_{k-s}, y_{s+1}, \dots, y_\ell, 1, \dots).$$

Et donc en appliquant f , et en notant j_s l'indice du groupe auquel appartient y_s , il vient

$$f((x_1, \dots, x_k, 1, \dots) * (y_1, \dots, y_\ell, 1, \dots)) = f_{i_1}(x_1) \cdots f_{i_{k-s}}(x_{k-s}) f_{j_{s+1}}(y_{s+1}) \cdots f_{j_\ell}(y_\ell).$$

Or, on a d'autre part, en notant m_n l'indice du groupe auquel appartient z_n ,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_k, 1, \dots) &= f_{i_1}(x_1) \cdots f_{i_{k-s}}(x_{k-s}) f_{m_1}(z_1) \cdots f_{m_s}(z_s), \\ f(y_1, \dots, y_\ell, 1, \dots) &= f_{m_s}(z_s^{-1}) \cdots f_{m_1}(z_1^{-1}) f_{j_{s+1}}(y_{s+1}) \cdots f_{j_\ell}(y_\ell). \end{aligned}$$

Donc finalement, on a bien

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_k, 1, \dots) f(y_1, \dots, y_\ell, 1, \dots) &= f_{i_1}(x_1) \cdots f_{i_{k-s}}(x_{k-s}) f_{m_1}(z_1) \cdots f_{m_s}(z_s) f_{m_s}(z_s^{-1}) \cdots f_{m_1}(z_1^{-1}) f_{j_{s+1}}(y_{s+1}) \cdots f_{j_\ell}(y_\ell) \\ &= f_{i_1}(x_1) \cdots f_{i_{k-s}}(x_{k-s}) f_{m_1}(z_1) \cdots f_{m_s}(z_s) f_{m_s}(z_s)^{-1} \cdots f_{m_1}(z_1)^{-1} f_{j_{s+1}}(y_{s+1}) \cdots f_{j_\ell}(y_\ell) \\ &= f_{i_1}(x_1) \cdots f_{i_{k-s}}(x_{k-s}) f_{j_{s+1}}(y_{s+1}) \cdots f_{j_\ell}(y_\ell) \\ &= f((x_1, \dots, x_k, 1, \dots) * (y_1, \dots, y_\ell, 1, \dots)) \end{aligned}$$

et f est bien un morphisme de groupes. Donc G est bien la somme des $(G_i)_{i \in I}$.

Après ces considérations techniques sur les groupes libres, revenons sur le théorème de van Kampen donné en introduction du mémoire et donnons une esquisse de preuve.

Théorème (van Kampen). *Soient X un espace topologique, et U_1 et U_2 deux ouverts recouvrant X connexes par arcs, dont leur intersection est aussi connexe par arcs. Alors*

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U_1) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2)} \pi_1(U_2).$$

Démonstration. Posons $\varphi : \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2) \rightarrow \pi_1(X)$. L'existence de ce morphisme est assurée par la propriété universelle du produit libre de $\pi_1(U_1)$ et $\pi_1(U_2)$. En effet, on a les injections canoniques $i_1 : \pi_1(U_1) \rightarrow \pi_1(X)$, $i_2 : \pi_1(U_2) \rightarrow \pi_1(X)$, $\psi_1 : \pi_1(U_1) \rightarrow \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)$, et $\psi_2 : \pi_1(U_2) \rightarrow \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)$. Ainsi, par propriété universelle, il existe un unique morphisme $\varphi : \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2) \rightarrow \pi_1(X)$ tel que $i_1 = \varphi \circ \psi_1$ et $i_2 = \varphi \circ \psi_2$. Montrons alors la surjectivité de φ . Elle découle directement du résultat suivant :

Lemme. *Soit X un espace topologique étant la réunion de deux ouverts U_1 et U_2 connexes par arcs, chacun contenant le point de base $x_0 \in X$. On suppose que $U_1 \cap U_2$ est également connexe par arcs. Alors chaque lacet de X basé en x_0 est homotope à un produit de lacets, chacun contenu soit dans U_1 , soit dans U_2 .*

Démonstration du lemme. Soit $f : [0; 1] \rightarrow X$ un lacet basé en $x_0 \in X$. Par compacité de $[0; 1]$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et une partition $0 = s_0 \leq \dots \leq s_m = 1$ de $[0; 1]$ telle que chaque sous-intervalle $[s_{i-1}; s_i]$, pour $i \in \{1, \dots, m\}$, est envoyé soit dans U_1 , soit dans U_2 . Puisque f est continue et comme U_1 et U_2 sont connexes par arcs, chaque $s_i \in [0; 1]$ possède un voisinage ouvert V_{s_i} dans $[0; 1]$, envoyé par f soit sur U_1 , soit sur U_2 .

Posons $f_i = f|_{[s_{i-1}; s_i]}$ le chemin obtenu par restriction de f à $[s_{i-1}; s_i]$. Alors f est la composition (homotopique) des chemins f_i dans U_1 ou U_2 pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, i.e. $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_m$.

Or, par hypothèse, $U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs, donc on peut choisir un chemin g dans $U_1 \cap U_2$, reliant x_0 au point $f(s_i) \in U_1 \cap U_2$. Considérons alors le lacet $(f_1 \cdot \overline{g_1}) \cdot (g_1 \cdot f_2 \cdot \overline{g_2}) \cdot (g_2 \cdot f_3 \cdot \overline{g_3}) \cdot \dots \cdot (g_{m-1} \cdot f_m)$. Il est homotope à f , et est la composition de lacets (chaque lacet correspondant au contenu d'une parenthèse) chacun « vivant » soit dans U_1 , soit dans U_2 . \square

φ est donc surjective. On admet alors que le noyau de cette application φ est précisément le sous-groupe distingué de $\pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)$ qui réalise le produit libre amalgamé $\pi_1(U_1) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2)} \pi_1(U_2)$. On conclut par le théorème d'isomorphisme. \square

D Comparaison des homologies simpliciale et singulière

Dans cette section, nous démontrons le théorème 5 donnant l'équivalence entre l'homologie singulière et l'homologie simpliciale.

Démonstration. On se restreindra au cas où X est inclus dans un espace de dimension finie $k \in \mathbf{N}$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On remarque que l'application de chaînes $c_n : \Delta_n(X, A) \rightarrow C_n(X, A)$ qui envoie tout simplexe de X sur son application associée $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ induit un morphisme de groupes $h_n : H_n^\Delta(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$.

• **Cas où A est vide.** Montrons alors par récurrence sur k que l'application induite $h_n : H_n^\Delta(X) \rightarrow H_n(X)$ est un isomorphisme. Pour cela, notons X^k la réunion des simplexes inclus dans X de dimension au plus k .

Si $k = 0$, alors X^0 est l'ensemble des sommets de X , et donc $C_n(X^0) \cong \Delta_n(X^0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $H_n^\Delta(X^0) \cong H_n(X^0)$.

Supposons alors que, pour $k \in \mathbf{N}^*$, $H_n^\Delta(X^{k-1}) \cong H_n(X^{k-1})$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Considérons la paire d'espaces (X^k, X^{k-1}) . Soit donc $n \in \mathbf{N}^*$. Par le théorème 3 et la remarque préliminaire sur le morphisme induit, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{k-1}) \end{array}$$

Montrons alors que la troisième flèche verticale est un isomorphisme. Par hypothèse de récurrence, la deuxième (en partant de la gauche) et la cinquième flèche sont des isomorphismes. Il ne reste plus qu'à regarder la première et la quatrième flèche. Le groupe $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$ est réduit à $\{0\}$ si $n \neq k$: en effet, $\Delta_n(X^k)/\Delta_n(X^{k-1})$ est composé des n -chaînes de X^k/X^{k-1} , c'est-à-dire des k -chaînes, donc est réduit à $\{0\}$ si $n \neq k$. Si $n = k$, c'est le groupe libre engendré par les k -simplexes de X . Ainsi, on a la suite (non exacte)

$$\dots \longrightarrow \{0\} \xrightarrow{\partial_{k+1}} \Delta_k(X^k, X^{k-1}) \xrightarrow{\partial_k} \{0\} \longrightarrow \dots$$

et donc $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) = \{0\}$ pour tout $n \neq k$, et $H_k^\Delta(X^k, X^{k-1}) = \text{Ker}(\partial_k)/\text{Im}(\partial_{k+1}) \cong \Delta_k(X^k, X^{k-1})$. Il ne nous reste plus qu'à construire un isomorphisme entre $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$ et $H_n(X^k, X^{k-1})$. Notons $(\Delta_\alpha^k)_\alpha$ la collection des k -simplexes de X^k , et (σ_α) les simplexes singuliers de X^k . Considérons la réunion disjointe des paires de simplexes $(\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k)$. Pour tout $x \in \bigsqcup_\alpha \Delta_\alpha^k$, il existe par définition

de la réunion disjointe un unique α tel que $x \in \Delta_\alpha^k$. Notons $\alpha = \text{ind}(x)$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \bigsqcup_\alpha (\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k) &\rightarrow (X^k, X^{k-1}) \\ x &\mapsto \sigma_{\text{ind}(x)}(x) \end{aligned}$$

est bien définie (on a, pour tout α , $\sigma_\alpha(\partial\Delta_\alpha^k) \subset X^{k-1}$), et est continue (si y est dans un voisinage ouvert de $x \in \bigsqcup_\alpha (\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k)$, alors $\text{ind}(x) = \text{ind}(y)$). Ainsi, l'application

$$\begin{aligned} \Phi_* : \bigsqcup_\alpha \Delta_\alpha^k / \bigsqcup_\alpha \partial\Delta_\alpha^k &\rightarrow X^k / X^{k-1} \\ \bar{x} &\mapsto \overline{\Phi(x)} \end{aligned}$$

est bien définie et rend le carré suivant commutatif, où π_Δ et π_k sont les surjections canoniques.

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_\alpha (\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k) & \xrightarrow{\Phi} & (X^k, X^{k-1}) \\ \pi_\Delta \downarrow & & \downarrow \pi_k \\ \bigsqcup_\alpha \Delta_\alpha^k / \bigsqcup_\alpha \partial\Delta_\alpha^k & \xrightarrow{\Phi_*} & X^k / X^{k-1} \end{array}$$

Par définition d'un Δ -complexe, Φ_* est un homéomorphisme. En effet, si $y \in X^{k-1}$, alors y est un j -simplexe de X , avec $0 \leq j \leq k-1$. Si $j = 0$, alors y est l'image d'un sommet d'un des Δ_α^k . Sinon, y est l'image d'un élément contenu sur le bord d'un $\Delta_\alpha^{j+1} \subset \partial\Delta_\alpha^k$. Donc dans tous les cas, la classe « nulle » a pour seul antécédent la classe « nulle ». Sinon, pour tout $y \in X^k \setminus X^{k-1}$, la classe de y dans X^k/X^{k-1} est un k -simplexe, c'est-à-dire l'image d'un unique $\sigma_{\alpha|\Delta^k}$, qui n'est autre qu'un élément de $\Delta_\alpha^k/\partial\Delta_\alpha^k$, d'où la bijectivité de Φ_* . De plus, Φ étant continue, Φ_* l'est aussi, et cela en fait un homéomorphisme. On en déduit alors par fonctorialité un isomorphisme entre $\tilde{H}_n(\bigsqcup_\alpha \Delta_\alpha^k / \bigsqcup_\alpha \partial\Delta_\alpha^k)$ et $\tilde{H}_n(X^k/X^{k-1})$, c'est-à-dire un isomorphisme entre $H_n(X^k, X^{k-1})$ et $H_n(\bigsqcup_\alpha \Delta_\alpha^k, \bigsqcup_\alpha \partial\Delta_\alpha^k)$ par le théorème 4, et ce, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

En utilisant un argument similaire au calcul d'homologie de la sphère, on montre que pour $n \neq k$, $H_n(\bigsqcup_\alpha \Delta_\alpha^k, \bigsqcup_\alpha \partial\Delta_\alpha^k)$ est réduit à $\{0\}$, ce qui donne directement l'isomorphisme entre $H_n(X^k, X^{k-1})$ et $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$ (le morphisme nul). Sinon, pour $n = k$, on montre (notamment en utilisant que 1_{Δ^k} engendre $H_k(\Delta^k, \partial\Delta^k)$) que $H_k(\bigsqcup_\alpha \Delta_\alpha^k, \bigsqcup_\alpha \partial\Delta_\alpha^k)$ est engendré par les k -simplexes, ce qui donne aussi un isomorphisme naturel entre $H_n(X^k, X^{k-1})$ et $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$.

On conclut alors en appliquant le lemme des cinq (cf. annexe A) qui nous donne que la troisième flèche du diagramme en début de preuve est un isomorphisme.

• **Cas où A est non vide.** Si $A \neq \emptyset$, alors il suffit d'appliquer le lemme des cinq au diagramme formé de la suite exacte longue en homologie simpliciale pour la paire (X, A) et de la suite exacte longue en homologie singulière, les deux suites étant reliées par les surjections canoniques.

□

Références

- [1] Antoine Bourget. *Topologie Algébrique II : Homologie, la théorie*. Youtube. 2020. url : <https://www.youtube.com/watch?v=Ws4bjDJoARo>.
- [2] Régine et Adrien Douady. *Algèbre et théories galoisiennes*. Cassini, 2005.
- [3] Joel Fine. « Espaces topologiques et la classification des surfaces ». In : (2009). url : http://homepages.ulb.ac.be/~joelfine/topologie1/topologie_notes_1-64.pdf.
- [4] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. 1^{re} éd. Cambridge University Press, 2001.
- [5] Thomas W. Hungerford. *Algebra*. Springer, 1974.
- [6] Frédérique Paulin. « Topologie algébrique élémentaire ». In : (2010). url : https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~paulin/notescours/cours_topoalg.pdf.
- [7] Michael Pors, Soumen Sarkar et Peter Zvengrowski. « Remarks about Δ -complexes and applications ». In : (2017).
- [8] Agustí Roig et Dylan Moreland. *The homology groups of T^2 by Mayer-Vietoris*. StackExchange. 2018. url : <https://math.stackexchange.com/questions/58311/the-homology-groups-of-t2-by-mayer-vietoris>.
- [9] Henri Paul de Saint Gervais. *Homologie des surfaces compactes orientables*. Analysis Situs. url : <http://analysis-situs.math.cnrs.fr/Homologie-des-surfaces-compactes-orientables.html>.
- [10] Henri Paul de Saint Gervais. *Homologie relative*. Analysis Situs. url : <http://analysis-situs.math.cnrs.fr/Homologie-relative.html>.
- [11] Henri Paul de Saint Gervais. *Suite exacte de Mayer Vietoris*. Analysis Situs. url : <http://analysis-situs.math.cnrs.fr/Suite-exacte-de-Mayer-Vietoris.html>.
- [12] Henri Paul de Saint Gervais. *Théorème d'écrasement et premiers calculs en homologie singulière*. Analysis Situs. url : <http://analysis-situs.math.cnrs.fr/Theoreme-d-ecrasement-et-premiers-calculs-en-homologie-singuliere.html>.
- [13] Michel Zisman. *Topologie algébrique élémentaire (maîtrise de mathématiques)*. Collection U / Série Mathématiques. Dunod, 1972.