Algèbre linéaire sur Z

Exercice 1. — Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer la forme de Smith de A, ainsi que les matrices de passage P, Q en précisant la relation entre P, Q et A.

b) Donner une base de $\operatorname{Im} A$ et de $\ker A$.

c) Donner un système d'équations (éventuellement modulaires) pour $\operatorname{Im} A$.

Exercice 2. — Paramétrer l'ensemble des entiers x, y, z, t tels que

$$2x + y + 4z + 5t = 2,$$

puis tels que :

$$2x + 3y + 4z + 5t = 2.$$

Exercice 3. — Soient $u = (4, 2, 2, -3, -1)$, $v = (5, 7, -11, 3, 10)$, $w = (-1, 1, -5, 3, 4)$ des vecteurs de $\mathbf{Z}^5$. On note E le sous $\mathbf{Z}$-module de $\mathbf{Z}^5$ engendré par u, v et w.

a) Donner une base de E.

b) Le vecteur $(1, 1, -1, 0, 1)$ est-il combinaison linéaire à coefficients rationnels de u, v, w ? Est-il combinaison linéaire à coefficients entiers de u, v, w ?

c) Donner un système d'équations linéaires de E (éventuellement modulaires).

d) Soit F le sous $\mathbf{Z}$-module de $\mathbf{Z}^5$ donné par les équations

$$\begin{cases} x + 2y + z & \equiv & 0 \; [\mathrm{mod}\ 5] \\ 3x + 2t & = & 0 \end{cases}$$

Donner une base de F.

e) Donner une base de $E \cap F$.

Exercice 4. — Soit A la matrice suivante :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

La fonction `smith_form(A)` renvoie :

```
                                   [-1  7  4  3  2  1]
                                   [ 1 -6 -5 -4 -3 -2]
                                   [ 0  0  0  0  0  1]
     [1 0 0 0 0 0]    [ 0  1  0]   [ 0  0  0  0  1  0]
  D= [0 6 0 0 0 0] P=[ 0 -1  1] Q=[ 0  0  0  1  0  0]
     [0 0 0 0 0 0],   [-1  2 -1],  [ 0  0  1  0  0  0]
```

et donne :

```
                          [ 6  7  8  9 10 11]
                          [ 1  1  1  1  1  1]
                          [ 0  0  0  0  0  1]
        [ 1 -1 -1]        [ 0  0  0  0  1  0]
  P^-1= [ 1  0  0]  Q^-1= [ 0  0  0  1  0  0]
        [ 1  1  0],       [ 0  0  1  0  0  0]
```

Que peut-on lire sans calculs sur $\operatorname{Im} A$ et $\ker A$?