Corrigé

Ex I 1) $A = \begin{bmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 2\end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}$ par exemple ; $\pi = (X-1)(X-2)$
$\chi_A = (X-1)^2(X-2)$ $\chi_B = (X-1)(X-2)^2$

2) On a la caractérisation : $rg(M) \leq r$ ssi tous les mineurs $(r+1)\times(r+1)$ de M sont nuls. Pour $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, en notant $\Delta_{I,J} : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ les applications continues "mineur $I \times J$", on a $\{M, rg(M) \leq r\} = \bigcap_{\substack{I,J \\ \text{de card} \\ r+1}} \Delta_{I,J}^{-1}(0)$ est une intersection finie de fermés donc un fermé.

3) $S = \begin{bmatrix}2 & i\\ i & 0\end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable : $\chi_S = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$
(et S n'est pas une homothétie de rapport 1)

4) u est diagonalisable ssi π_u est scindé à racines simples.
Comme π_u annule u et donc $u_{|F}$, on a $\pi_{u|F} \mid \pi_u$ et donc $\pi_{u|F}$ est scindé à racines simples. On a donc bien que $u_{|F}$ est diagonalisable.

5) Soit $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre et λ la valeur propre associée.
Alors $\langle X, u(X)\rangle = \langle X, \lambda X\rangle = \lambda \|X\|^2$.
$\langle u^*(X), X\rangle = \langle -\lambda X, X\rangle = -\bar{\lambda}\|X\|^2$ par sesquilinéarité $\Big\}$ comme $X \neq 0$, $\lambda = -\bar{\lambda}$ ie $\lambda \in i\mathbb{R}$.

6) $\bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i = \left(\mathrm{Vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}\right)^{\perp}$ Donc $\left(\mathrm{Vect}\{\varphi\} \subset \mathrm{Vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}\right) \Leftrightarrow (\mathrm{Vect}\,\varphi)^{\perp} \supset \mathrm{Vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}^{\perp}$
$\ker \varphi = \mathrm{Vect}\{\varphi\}^{\perp}$

II 1) Mq u stabilise $\ker v$ si u et v commutent
(si $x \in \ker v$, $vu(x) = uv(x) = u(0) = 0$ donc $u(x) \in \ker v$).
Comme u et v commutent, u commute avec tout polynôme en v et par ce qui précède, u stabilise les espaces caractéristiques de v (qui sont de la forme $\ker P(v)$ pour $P = (X-\lambda)^{m_\lambda}$).

2) (i) $\Rightarrow$ (ii) Si χ_u admet n racines distinctes, tous les espaces caractéristiques de u sont de dimension 1, en somme directe (par le lemme des noyaux) et chacun est stable par u.
Un endomorphisme nilpotent v commutant à u doit stabiliser chacune de ces droites ; cela fournit une base de diagonalisation pour v.
v est alors nilpotent et diagonalisable ; comme sa seule vp possible est 0, on a que v est nul.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Si χ_u admet une racine au moins double λ_1, alors ~~on distingue 2 cas~~ il existe une base B ~~soit u est diagonal~~ dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\mathrm{mat}_B\, u = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & N_1 & \\ & \lambda_1 & * \\ \hline & 0 & \end{array}\right).$$

1er cas : si $N_1 \neq 0$, l'endomorphisme v tq $\mathrm{mat}_B\, v = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & N_1 & \\ & 0 & 0 \\ \hline & 0 & \end{array}\right)$ est nilpotent non nul et commute à u.

2ème cas : si $N_1 = 0$, tout endomorphisme v tq $\mathrm{mat}_B\, v = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & * & \\ & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right)$ commute à u. On peut bien en trouver un tel non nul.

Ex III

1) $n=2$, $Q(x_1,x_2) = 2x_1x_2 = \frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2\right]$. $rg = 2$, $sign = (1,1)$.

$n=3$, $Q(x_1,x_2,x_3) = 2(x_1x_2 + x_2x_3) = 2x_2(x_1+x_3) = \frac{1}{2}\left[(x_2+x_1+x_3)^2 - (x_2-x_1-x_3)^2\right]$.
$rg = 2$, $sign = (1,1)$

2) On ~~procède par récurrence~~ développe $\chi_{n+2} := \det \begin{pmatrix} -X & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -X \end{pmatrix}$ ~~Pour n=1 et n=2~~ par rapport à la dernière colonne

$$\chi_{n+2} = -X\chi_{n+1} - \underbrace{\det \begin{pmatrix} -X & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & 1 & -X & 1 \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{on développe selon la dernière ligne} \\ = \chi_n}} = -X\chi_{n+1} - \chi_n.$$

Q_n est non dégénérée ssi S_n est inversible ssi χ_n n'est pas divisible par X.

Pour $n=2$, Q_2 est non dégénérée.

Pour $n=3$, Q_3 est dégénérée.

Montrons par récurrence sur k que $\begin{cases} Q_{2k} \text{ est non dégénérée} \\ Q_{2k+1} \text{ est dégénérée} \end{cases}$

- $\chi_{2k+2} = -X\chi_{2k+1} - \underbrace{\chi_{2k}}_{\text{non divisible par } X \text{ par HR}}$. $\Rightarrow$ χ_{2k+2} est non divisible par X. et Q_{2k+2} est non dégénérée.

- $\chi_{2k+3} = -X\chi_{2k+2} - \underbrace{\chi_{2k+1}}_{\text{divisible par } X \text{ par HR}}$ $\Rightarrow$ χ_{2k+3} est divisible par X et Q_{2k+3} est dégénérée.

3) Comme Q_{2k+1} est dégénérée, $rg(Q_{2k+1}) \leq 2k$.

Or la restriction de Q_{2k+1} à $Vect(e_1, \dots e_{2k}) \simeq Q_{2k}$, de rang $2k$ car Q_{2k} est non dégénérée.

Donc $rg(Q_{2k+1}) \geq 2k$. On a donc $rg(Q_{2k+1}) = 2k$.

4) On a $Q(-x_1, x_2, -x_3, \dots, (-1)^n x_n) = -Q(x_1, \dots, x_n)$.

ie ${}^t\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} S_n \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = -S_n$. sont congruentes.

5) Q_n et $-Q_n$ ont donc la même signature.

Mais d'après l'algorithme de Gauss, si Q_n est de signature (p, q) $-Q_n$ est de signature (q, p).

On en déduit donc (compte tenu du rang de Q_n) :

si n pair, $n = 2k$, $sign(Q_{2k}) = (k, k)$
si n impair, $n = 2k+1$, $sign(Q_{2k+1}) = (k, k)$.