Corrigé.

Ex 1 1) i) $K[x,y] := \{P(x,y),\ P \in K[X,Y]\}$.

On a par le lemme de la base télescopique

$$[K[x,y]:K] = [K[x,y]:K[x]]\cdot\underbrace{[K[x]:K]}_{m} \quad (*)$$

Or $[K[x][y]:K[x]] \leq [K(y):K] = n$ car le polynôme minimal de y sur $K(x)$ divise le pol-min de y sur K.

D'où $[K[x,y]:K) \leq n\cdot m$.

ii) Par $(*)$, on a $n \mid [K[x,y]:K]$ et par symétrie on a aussi $m \mid [K[x,y]:K)$,

D'où $ppcm(m,n) = mn \mid [K(x,y):K]$.

D'après i) on a donc $(K[x,y]:K) = mn$.

2) Une réflexion par rapport à un hyp-affine est la symétrie orthogonale par rapport à cet hyperplan. Quitte à vectorialiser $\mathcal{E}$ en un pt de l'hyperplan, ~~est~~ la symétrie orthogonale vectorielle correspondante.

ii) Soient s_1 et s_2 deux symétries affines de $\mathbb{R}^3$.

Alors $\overrightarrow{s_1 o s_2} = \vec{s_1} o \vec{s_2} \in SO(3)$

D'après la classification des isométries de l'espace c'est donc une rotation si $\overrightarrow{s_1 o s_2} \neq \vec{id}$ et une translation si $\overrightarrow{s_1 o s_2} = \vec{id}$.

On a $\vec{s_1} o \vec{s_2} = id \iff \vec{s_1} = \vec{s_2}^{-1} = \vec{s_2}$. c'est-à-dire ssi les hyperplans ont m̂ direction, c'est-à-dire s'ils sont parallèles.

3) pour $\mu_n^* = \{e^{2ik\pi/n},\ k \wedge n = 1\}$, $\Phi_n(x) = \prod_{\xi \in \mu_n^*} (X - \xi)$.

ii) On a $X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \phi_d(X)$. $(*)$

iii) Par récurrence mq $\phi_n(x) \in \mathbb{Z}$ et (est unitaire).

$\phi_1 = X - 1$.

Si $\forall d < n$, $\phi_d(x) \in \mathbb{Z}(x)$, de $(*)$ on en déduit que $\phi_n(X)$ est le quotient de $X^n - 1$ par $A = \prod_{\substack{d \mid n \\ d < n}} \phi_d(x)$, avec A unitaire dans $\mathbb{Z}(x)$. Ainsi, $\phi_n(x) \in \mathbb{Z}(x)$.

iv) On a $\phi_2(x) = X+1$, d'où $\phi_2(x) = -(-X-1) = -\phi_1(-x)$

v) Pour n impair, $X^{2n} - 1 = (X^n - 1)(X^n + 1) = -((-X)^n + 1)(X^n$

Montrons par récurrence sur n $\left\{ \phi_{2n}(x) = \begin{cases} -\phi_n(-x) & \text{si } n = 1 \\ \phi_n(-x) & \text{si } n \geq 3 \end{cases} \right.$ n impair

<u>Init ok</u>

On a $X^{2n} - 1 = \prod_{d \mid 2n} \phi_d = \left(\prod_{d \mid n} \phi_d\right)\left(\prod_{d \mid n} \phi_{2d}\right)$

D'où $(X^n + 1) = -((-X)^n - 1) = \phi_2\left(\prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1 \\ d \neq n}} \phi_{2d}\right)\phi_{2n}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\ \, \| $

$\qquad\qquad\quad - \prod_{d \mid n} \phi_d(-x)$

Par HR, on a $-\prod_{\substack{d|n \\ d\neq n}} \phi_d(-x) = \prod_{\substack{d|n \\ d\neq n}} \phi_{2d}(x)$, d'où

$\phi_{2n}(x) = \phi_n(-x)$ si $n \geq 3$.

4) Posons $\sigma_1 = X+Y+Z$, $\sigma_2 = XY+YZ+XZ$, $\sigma_3 = XYZ$.

$$X^2Y^2 + Y^2Z^2 + X^2Z^2 = \sigma_2^2 - 2(X^2YZ + XY^2Z + XYZ^2)$$
$$= \sigma_2^2 - 2\sigma_3\sigma_1.$$

5) On sait que $\{x \in \mathbb{F}_q,\ x \in \mathbb{F}_p\}$ est caractérisé comme $\{x \in \mathbb{F}_q,\ x^p = x\}$.

Or $N(\alpha)^p = (\alpha\alpha^p \cdots \alpha^{p^{n-1}})^p = \alpha^p\alpha^{p^2} \cdots \alpha^{p^n}$

Or dans $\mathbb{F}_q$, tout élément x vérifie $x^{p^n} = x$. D'où

$$N(\alpha)^p = \alpha^p \cdots \alpha^{p^{n-1}}\alpha = N(\alpha).$$

Donc $N(\alpha) \in \mathbb{F}_p$.

Ex2

1) Il suffit de le vérifier sur les transpositions qui engendrent le groupe symétrique. ou de revenir à la définition de la signature :

si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma \cdot U_n = \prod_{i<j} (X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)})$

$= (-1)^{\ell}\, U_n$

où ℓ est $\#\{i<j,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}$

et $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell}$ est une définition classique de la signature

2) $\mathfrak{S}_{n-1} \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$ comme sous-groupe des permutations fixant n.

Pour P antisym, $P \in \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n-1}(X_n)$, et $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$,

si $P = a_0(X_1, \dots, X_{n-1}) + \cdots + a_{km}(X_1 \cdots X_{n-1}) X_n^{km}$, alors

$\sigma \cdot P = \sigma \cdot a_0 + (\sigma \cdot a_1)X_n + \cdots + (\sigma \cdot a_k) X_n^k$, d'où $\sigma \cdot a_0 = \varepsilon(\sigma) a_0, \dots, \sigma \cdot a_k = \varepsilon(\sigma) a_k$.

ie P a ses coefficients antisymétriques.

3) Si P est antisymétrique, pour $\sigma = (i, n)$, on a $\sigma \cdot P = -P$.

En particulier, en évaluant en $X_n = X_i$, on obtient.

$$P(X_1, \dots, X_{n-1}, X_i) = -P(X_1, \dots, X_i)$$

D'où $P(X_1, \dots, X_{n-1}, X_i) = 0$.

$P \in \mathcal{A}_{n-1}(X_n)$ admet donc $X_1, \dots X_{n-1}$ comme racines $\neq$.

P est divisible par $(X_1 - X_n) \cdots (X_{n-1} - X_n)$.

4) Par récurrence les coeff de P sont tous divisibles par U_{n-1} donc P aussi. Il est donc div par $U_{n-1}(X_1 - X_n) \cdots (X_{n-1} - X_n) =$

En posant $P = U_n Q$, $\sigma(P) = \sigma(U_n)\sigma(Q)$, $\varepsilon(\sigma)U_n Q = \varepsilon(\sigma)P = \varepsilon(\sigma)U_n\sigma(Q)$ D'où $\sigma \cdot Q = Q$. ie Q est symétrique