Algèbre linéaire

1) Soit $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{ a + b\sqrt{2} , (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \} \subset \mathbb{R}$.
Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un corps.
Si $(a,b) \neq (0,0)$, quel est l'inverse de $a+b\sqrt{2}$?

2) Soit E un k-espace vectoriel et $(E_i)_{i\in I}$ des sous-espaces vectoriels.
a) Montrer que $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sev de E.
b) $\bigcup_{i\in I} E_i$ est-il un sev ?

3) Soit $X = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \}$.
a) X est-il un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
b) Que vaut $\mathrm{Vect}(X)$?

4) Soit E un k-ev et $x, y \in E$.
A quelle condition a-t-on $\mathrm{Vect}(x) = \mathrm{Vect}(y)$?

5) On note $\mathcal{I} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ impaire} \}$
$\mathcal{P} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ paire} \}$.
Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont des espaces vectoriels et que
$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$.

6) Soit $n \geq 0$ un entier. On note $k[X]_{\leq n} = \{P \in k[X], \deg P \leq n\}$

a) Mq $k[X]_{\leq n}$ est un kev.

b) Soit $P_0, \dots, P_n$ une famille de polynômes $\neq 0$ tq $\deg P_i = i$ (on dit que les polynômes sont à degrés échelonnés).
Montrer que la famille $\{P_0, \dots, P_n\}$ est libre.
Montrer que $\mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_n) = k[X]_{\leq n}$.

c) Montrer que la famille $(X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

d) Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des éléments de k 2 à 2 distincts.
Montrer que la famille $\{(X-\alpha_i)^n\}$ est libre

7) Soit $\theta \in \mathbb{C}^*$ et u_θ la suite définie par $u_\theta(n) = \theta^n$.
Soient $\theta_0, \dots, \theta_n$ des nombres complexes 2 à 2 distincts.
Montrer que $\{u_{\theta_0}, \dots, u_{\theta_n}\}$ est une famille libre de l'ev. des suites complexes.

8) Soit E un kev et $x \in E$.
A quelle condition la famille $\{x\}$ est-elle libre ?

Algèbre linéaire

1) Soit $H := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ 3x - 2y + t = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^4$.

Mq H est un $\mathbb{R}$ ev, puis en donner sa dimension et plusieurs bases.

2) Soit E un k ev de dimension finie.
On suppose que E contient deux plans P_1 et P_2 tels que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$.
Mq $\dim E \geq 4$.

3) Soit $n \geq 0$ un entier et $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que la famille $\{1, (X-a), (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\}$ est une base de $\mathbb{C}[X]_{\leq n}$.
Expliciter la décomposition d'un $P \in \mathbb{C}[X]_{\leq n}$ dans cette base.

4) Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}^*$ 2 à 2 distincts et soit $P = (X-x_1)\dots(X-x_n)$.
Posons $E := \left\{ \frac{Q}{P} \in \mathbb{C}(X),\ \deg Q \leq n-1 \right\}$.
Montrer que E est un $\mathbb{C}$-ev et que $\left\{ \frac{1}{X-x_1}, \dots, \frac{1}{X-x_n} \right\}$ en est une base. Quel résultat d'analyse retrouve-t-on ? généraliser.

5) Soit E un k-ev de dimension $n \geq 0$.

Montrer que toute famille libre $\mathcal{L} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E.

Montrer que toute famille $\{y_1, \dots, y_k\}$ avec $k \leq n-1$ n'est pas génératrice.

Soit $n \geq 1$ un entier.

6) Soient $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. et $\mathcal{L}$ la famille de $\mathbb{R}[X]_{\leq n-1}$

$$\{P_1 = (X-\alpha_2) \cdots (X-\alpha_n),\ P_2 = (X-\alpha_1)(X-\alpha_3)\cdots(X-\alpha_n),\ \dots,\ P_n = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_{n-1})\}.$$

(on omet le facteur $(X-\alpha_i)$ dans P_i).

Montrer que $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}[X]_{\leq n-1}$.

Expliciter la décomposition d'un $P \in \mathbb{R}[X]_{\leq n-1}$ dans cette base.

7) Soit E un kev de dim finie et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de même dimension.

Montrer que E_1 et E_2 ont un supplémentaire en commun.

Soit $n \geq 0$ un entier.

8) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ fixé de degré $1 \leq d \leq n$.

$$E := \{ Q \in \mathbb{R}[X]_{\leq n},\ P \text{ divise } Q \}.$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev, calculer sa dimension et trouver un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$.

Suites linéaires récurrentes.

On note $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-ev des suites à valeurs complexes :

$$\mathcal{S} := \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \, , \forall n \, , u_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

On fixe un entier k et des scalaires $\alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0 \in \mathbb{C}$ avec $\alpha_0 \neq 0$.
Soit $\mathcal{L} = \left\{ u \in \mathcal{S}, \forall n, \; u_{n+k} = \alpha_{k-1} u_{n+k-1} + \dots + \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_0 u_n \right\}$.

1) Montrer que $\mathcal{L}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie

2) Donner la dimension de $\mathcal{L}$ et en expliciter une base.

3) Pour tout $\vartheta \in \mathbb{C}$, on note u_ϑ la suite géométrique de raison ϑ, ie : $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_\vartheta(n) = \vartheta^n$.

Montrer que $u_\vartheta \in \mathcal{L}$ ssi ϑ est racine du polynôme
$P := X^k - \alpha_{k-1} X^{k-1} - \dots - \alpha_0 \in \mathbb{C}[X]$.

4) Dans cette question, on suppose que P a toutes ses racines distinctes : $P = (X-\vartheta_1)\dots(X-\vartheta_k)$ avec $\vartheta_i \neq \vartheta_j$ si $i \neq j$.

a) Montrer que $\{u_{\theta_1}, \dots, u_{\theta_k}\}$ est une base de $\mathcal{L}$.

b) Application numérique : suites de Fibonacci.

$$\mathcal{F} = \{ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \}.$$

Exprimer le terme général d'un élément $u \in \mathcal{F}$ en fonction de u_0 et u_1.

5) Pour $\theta \in \mathbb{C}^*$ et s entier ≥ 0, soit v_θ^s la suite définie par :

$$v_\theta^s(n) = n^s \theta^n.$$

(N.B : on a donc $v_\theta^0 = u_\theta$).

a) Montrer que la famille $\{v_\theta^0, v_\theta^1, \dots, v_\theta^{k-1}\}$ est libre.

b) Mq $v_\theta^1 \in \mathcal{L}$ ssi $P(\theta) = P'(\theta) = 0$.

c) plus généralement, montrer que $v_\theta^s \in \mathcal{L}$ ssi

$$P(\theta) = P'(\theta) = P''(\theta) = \dots = P^{(s)}(\theta) = 0$$

($P^{(s)}$ désigne la dérivée s-ème).

6) On suppose que $P = (X-\theta)^k$.

a) Mq $\{v_\theta^0, \dots, v_\theta^{k-1}\}$ est une base de $\mathcal{L}$.

b) Application numérique : soit $\mathcal{R} = \{u \mid u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}$.
Exprimer le terme général d'un $u \in \mathcal{F}$ en fonction de u_0 et u_1.

Applications linéaires

1) a) Décrire les applications $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

b) Décrire les applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

2) Vrai ou faux ? Soit E un kev de dim finie, $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E, $u \in \mathcal{L}(E)$

a) Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est libre, alors $\{u(e_1), \dots, u(e_n)\}$ aussi.

b) Si $\{u(e_1), \dots, u(e_n)\}$ est libre, alors $\{e_1, \dots, e_n\}$ aussi.

c) Mêmes questions qu'en a) et b) en remplaçant "libre" par "génératrice".

3) Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

a) $\operatorname{Ker} v \circ u = \ker u \iff \operatorname{Im} u \cap \ker v = \{0\}$

b) $\operatorname{Im} v \circ u = \operatorname{Im} v \iff \operatorname{Im} u + \ker v = E$

4) Soit E de dim finie, E_1, E_2 deux sev de E.
A quelle condition existe-t-il $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\ker u = E_1$ et $\operatorname{Im} u = E_2$?

5) Soient E de dim finie, $\dim E = n$, $u, v \in \mathcal{L}(E)$

Mq $rg(u) + rg(v) - n \leq rg(u \circ v) \leq \min(rg(u), rg(v))$

6) a) Soient E_1, E_2 deux ev de dim finie.
Montrer que $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ est de dimension finie et calculer cette dimension.

b) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang $r \geq 1$ fixé. On pose

$$A := \{ g \in \mathcal{L}(E), \ f \circ g = 0 \}$$

$$B := \{ g \in \mathcal{L}(E), \ g \circ f = 0 \}$$

Calculer les dimensions de A et B.
[Indication : $g \in A$ ssi $\operatorname{Im} g \subset \ker f$ ...]

E un kev, $\dim E = n \geq 1$.

7) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $u^n = 0$, $u^{n-1} \neq 0$.
Soit $x \in E$ tq $u^{n-1}(x) \neq 0$. Mq $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

8) Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ parallèlement au plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$.

a) Vérifier que ces 2 espaces sont supplémentaires

b) Calculer $p\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$.

Matrices et applications linéaires

1) Ecrire les matrices des endomorphismes $\Phi : k[X]_{\leq 3} \to k[X]_{\leq 3}$ suivants dans la base canonique :

a) : $\Phi(P) := P(X+1)$

b) : $\Phi(P) := P + (X+1)P'$

Même question en remplaçant la base canonique par la base $\{1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3\}$

2) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle.

Montrer que $rg(M) = rg({}^tM M)$. $(*)$ et retrouver $rg(M) = rg({}^tM)$

$(*)$ est-il vrai pour $M \in M_n(\mathbb{C})$?

3) Soit $M \in M_n(k)$. Mq $rg(M) = 1$ ssi il existe deux vecteurs colonnes X et Y tq $M = X\,{}^tY$.

4) Un critère d'inversibilité : Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(k)$ telle que

$$\forall\ 1 \leq i \leq n, \quad |m_{ii}| > \sum_{j \neq i} |m_{ij}| .$$

Montrer que M est inversible.

5) Soit E de dim finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) Mq u est un projecteur ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E tq

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{r}{\longleftrightarrow} & \overset{n-r}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{array} \end{array}$$

b) (si car $k \neq 2$). Quel est l'énoncé analogue pour les symétries ?

6) Soit E ~~de~~ k-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.
Montrer que $id_E + u$ est un endomorphisme inversible.

Soit k de caractéristique $\neq 2$.

7) Soient $S_n(k)$ (resp. $A_n(k)$) le sev de $M_n(k)$ constitué des matrices symétriques (resp. antisymétriques).

a) Calculer les dimensions de ces espaces.

b) Mq $M_n(k) = S_n(k) \oplus A_n(k)$.

Soit E un k-ev de dim finie ; $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ des bases.

8) Comment appelle-t-on habituellement la matrice $\mathrm{Mat}_{(\underline{e}, f)}(id)$?

9) Calculer le rang des matrices suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a^2 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ a & a^2 & a+2a^2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

en fonction des valeurs du paramètre $a \in k$.

Déterminants

1) Calculer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & x \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & x & & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$

c) $\left| \left(1 + x_i y_j \right)_{1 \leq i,j \leq n} \right|$

d) $\left| \left(|\alpha_i - \alpha_j| \right)_{1 \leq i,j \leq n} \right|$

où $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$.

e) $\begin{vmatrix} x+a_1 & & x \\ & \ddots & \\ x & & x+a_n \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$ $a_i \in \mathbb{C}$.

(déterminant circulant)

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & & \theta_n \\ \theta_1^2 & \vdots & & \\ \vdots & & & \\ \theta_1^{n-1} & \theta_2^{n-1} & \cdots & \theta_n^{n-1} \end{vmatrix}$ (déterminant de Vandermonde).

2) Soit

$$D_n = \begin{vmatrix} a & c & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ 0 & & b & a \end{vmatrix} \quad (n \times n).$$

Exprimer D_{n+2} en fonction de D_n et D_{n+1}.

Application numérique : $a = 6$, $b = 9$, $c = 1$.

3) Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(k) \to \mathcal{M}_n(k)$, $M \mapsto {}^tM$. Calculer dét φ.

4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $\forall (i,j)$, a_{ij} est impair. Montrer que 2^{n-1} divise dét A.

5) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A admet un inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ (ie un $B \in \mathcal{M}_n(\underline{\underline{\mathbb{Z}}})$ tq $AB = \mathbb{I}d$) ssi dét $A \in \{+/-1\}$.

6) Soit E un kev de dim finie. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f^2 = -Id$. Montrer que dim E est pair.

7) Calculer le rang de $Co(M)$ en fonction de celui de M.
Déterminer dét $Co(M)$ en fonction de dét M.

8) Soit $C_1, \ldots, C_p$ p vecteurs colonnes de k^n $(n \geq p)$. Montrer que la famille $\{C_1, \ldots, C_p\}$ est libre ssi au moins un des $\binom{p}{n}$ déterminants $(p \times p)$ extraits de la matrice $(C_1 | \cdots | C_p)$ est non nul.

9) Soit $\{C_1, \ldots, C_p\}$ une famille $\mathbb{Q}$-libre de vecteurs de $\mathbb{Q}^n$ $(n \geq p)$. Montrer que $\{C_1, \ldots, C_p\}$ est une famille $\mathbb{R}$-libre de $\mathbb{R}^n$.

Valeurs propres, Vecteurs propres, diagonalisabilité.

1) Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$ (a, b, c sont des paramètres)

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$ (a, b, c paramètres réels)

2) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de :

$$\varphi : \mathbb{R}_{\leq n}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq n}[X]$$
$$P \longmapsto (X^2-1)P'' - (2X+1)P'$$

L'application φ est-elle diagonalisable ?

3) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

Calculer J^2. En déduire les valeurs propres de J, puis son polynôme caractéristique.

4) Quelles sont les valeurs propres des symétries, des projecteurs, et des endomorphismes nilpotents ?
Sont-ils diagonalisables ?

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ des nombres complexes.
5) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice :

$$C := \begin{pmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

6) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire que toute $A \in M_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices A_n diagonalisables).

7) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Mq A est diagonalisable ssi ${}^tA$ l'est.

8) Soient f et g deux endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent (c'est-à-dire tels que $f \circ g = g \circ f$).
Mq les espaces propres de f sont stables par g.

9) a) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Mq $f \circ g$ et $g \circ f$ ont mêmes valeurs propres (sans nécessairement la même multiplicité).
Ceci suggère l'énoncé plus fort suivant : « $f \circ g$ et $g \circ f$ ont même polynôme caractéristique
b) Montrer cet énoncé si f est inversible
c) Montrer cet énoncé pour tout f [Indication : f est limite d'endomorphismes inversibles].

Polynômes d'endomorphismes

Soient A, B deux matrices carrées

1) Calculer le polynôme minimal de la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

2) Calculer le polynôme minimal de la matrice "compagnon" :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad a_i \in \mathbb{C}.$$

[<u>Indication</u> : utiliser le th. de Cayley-Hamilton, et remarquer que la famille $\{C(e_1), \dots, C^{n-1}e_1\}$ est libre (où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$)]

3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable.
Soit $F \subset E$ un sev stable par u.
Montrer que la restriction de u à F est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{L}(F)$.
[<u>Indication</u> : utiliser le polynôme minimal].

<u>Application</u> : soient u et v deux endomorphismes diagonalisables qui <u>commutent</u>.
Montrer que u et v sont diagonalisables dans une même base.

[<u>Indication</u> : Mq les espaces propres de u sont stables par v.
Appliquer 3) aux restrictions de v aux espaces propres de u]

4) Soit S l'espace des suites complexes. Soient $a_0, \dots, a_{k-1}$ des scalaires et $\mathcal{L}$ l'espace de suites linéaires récurrentes :

$$\mathcal{L} := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_{n+k} = a_{k-1} u_{n+k-1} + \dots + a_0 u_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

On note $P = X^k - a_{k-1} X^{k-1} - \dots - a_0 \in \mathbb{C}[X]$.

et $D : S \to S$

$(u_n) \longmapsto (v_n)$ définie par $v_n = u_{n+1}$.

a) Mq $\mathcal{L} = \ker(P(D))$.

b) En déduire que si $P = \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{n_i}$ (α_i 2 à 2 $\neq$) alors

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker (D-\alpha_i)^{n_i}.$$

c) Quel est le polynôme caractéristique de la restriction de D à $\mathcal{L}$?

[Indication : Soit u_0 la suite de $\mathcal{L}$ commençant par $(0, \dots, 0, 1)$. Mq $u_0, Du_0, \dots, D^{k-1}u_0$ est libre et écrire la matrice de D dans cette base]

5) Calculer les exponentielles des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

6) Mq l'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

[Indication : se ramener par réduction à trouver un antécédent de $\lambda Id + N$, avec N nilpotente).