L2 Calcul formel Corrigé du contrôle du 20 avril

<u>Exercice 1</u> : Soit E le sev de $\mathbb{R}^4$ engendré par $v_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Comme on l'a vu en cours, trouver un système d'équations de E revient à trouver une base de $E^{\perp} := \{ \varphi \in (\mathbb{R}^4)^*,\ \varphi(e) = 0\ \forall e \in E \}$.

Un élément $\varphi \in (\mathbb{R}^4)^*$ est une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$; on peut représenter un tel φ par un vecteur ligne $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ ($a_i \in \mathbb{R}$) en écrivant $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =: a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$.

$E^{\perp}$ est alors défini par un système de deux équations linéaires ~~en~~ les a_i :
$$\begin{cases} \varphi(v_1) = 0 \\ \varphi(v_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0a_1 + 1a_2 + 2a_3 + 3a_4 = 0 \\ 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0 \end{cases}$$

Ce système est déjà échelonné : on peut voir a_3 et a_4 comme des paramètres libres ; (a_1 et a_2) sont déterminés uniquement par le système précédent.

Une base de $E^{\perp}$ est donc : $\begin{bmatrix} a_1 = 1 \\ a_2 = -2 \\ a_3 = 1 \\ a_4 = 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} a_1 = 2 \\ a_2 = -3 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 1 \end{bmatrix}$.

Un système d'équations pour E est donc :
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : Soit (S) le système suivant : $\begin{cases} 2x - y + z = b_1 \\ -2x + 4y + 2z = b_2 \\ -2x + 7y + 5z = b_3 \end{cases}$

a) (S) se reformule en un système $MX = B$.

où M est la matrice entière $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Si P et Q sont des matrices inversibles entières, le système $MX = B$ admet des solutions entières ssi le système $PMQY = PB$ en admet. On se ramène donc à un système "diagonal" en appliquant l'algorithme présenté en cours :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & b_1 \\ -2 & 4 & 2 & b_2 \\ -2 & 7 & 5 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & -2 & b_2 \\ 5 & 7 & -2 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{array}{cccc} & C_2+C_1 & C_3-2C_1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 2 & 6 & -6 & b_2 \\ 5 & 12 & -12 & b_3 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 6 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & (b_3 - 5b_1) - 2(b_2 - 2b_1) \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{cccc} & & C_3+C_2 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 6 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 12 & 0 & b_3 - 5b_1 \end{array} \leftarrow \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ L_2 - 2L_1 & 0 & 6 & -6 & b_2 - 2b_1 \\ L_3 - 5L_1 & 0 & 12 & -12 & b_3 - 5b_1 \end{array}$$

(S) a des solutions entières ssi $\begin{cases} 6 \mid b_2 - 2b_1 \\ \underline{\text{ET}} \quad b_3 - 2b_2 - b_1 = 0 \end{cases}$.

b) Le système (S) admet une solution rationnelle ssi $PMQY = PB$ en admet ie ssi $b_3 - 2b_2 - b_1 = 0$