Feuille d'exercices n^{o}6

1. Combien de matrices orthogonales $A \in O_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers y a-t-il ?

2. Une matrice symétrique réelle est dite (définie) positive si elle représente une forme bilinéaire (définie) positive.

2.a. Montrer qu'une matrice symétrique est (définie) positive si et seulement si ses valeurs propres sont (strictement) positives.

2.b. Montrer que $S \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive si et seulement s'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

2.c. Montrer que $S \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive si et seulement s'il existe une matrice $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

2.d. Montrer que pour toute matrice symétrique positive S, il existe une et une seule matrice symétrique positive R telle que $R^2 = S$.

3. On considère la matrice de Hadamard $H = (h_{ij})$ définie par $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ pour $i, j = 1, 2, \ldots, n$, en se plaçant dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, <-,->)$ muni du produit scalaire canonique.

3.a. Montrer que $h_{ij} = \int_0^1 t^{i+j-2} dt$.

3.b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $f_x(t) = (\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1})^2$ est continue et à valeurs positives pour $t \in [0, 1]$.

3.c. Déduire de ce qui précède que H est une matrice symétrique définie positive.

4. Orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit $(E, <-,->)$ un espace euclidien de dimension n et soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension $k < n$, muni d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_k)$.

4.a. Montrer que $p(v) = \sum_{i=1}^{i=k} <v, e_i> e_i$ définit une application linéaire $E \to V$ dont la restriction à V est l'identité.

4.b. Montrer que pour $v \notin V$ le vecteur $e' = p(v) - v$ est non nul et orthogonal à V. En déduire que $(e_1, \ldots, e_k, \frac{e'}{\|e'\|})$ est une base orthonormée du sous-espace vectoriel $V \oplus \mathbb{R}.v$ de E.

4.c. Déduire de ce qui précède une construction d'une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E à partir d'une base $(v_1, \ldots, v_n)$ quelconque de sorte que pour $1 \leq k \leq n$ on ait $Vect(e_1, \ldots, e_k) = Vect(v_1, \ldots, v_k)$.

4.d. Avec les notations de **4.c.** montrer l'inégalité de Hadamard:

$$\det(v_1, \ldots, v_n) \leq \|v_1\| \|v_2\| \cdots \|v_n\|$$

où le la norme est calculée avec le produit scalaire de l'espace euclidien E. Quand a-ton égalité ?

5. On considère la matrice réelle $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a^2 & a - bc & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}$.

Pour quels $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice $A(a, b, c)$ est orthogonale ? Le cas échéant, spécifier la nature de cette transformation orthogonale.

6. Soit u un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $(E, < -, - >)$. Montrer que $\ker(u)$ est $im(u)$ sont des sous-espaces orthogonaux de E tels que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{im}(u)$.

7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique ayant des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que la somme des carrés des coefficients de A est égale à la somme des carrés des valeurs propres.

8. Soit $E = \mathbb{R}_{\leq n}[X]$ et $< P, Q >= \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)dt$.

8.a. Montrer que $(E, < -, - >)$ est un espace euclidien.
8.b. Montrer que $u(P) = 2XP' + (X^2 - 2)P''$ est un endomorphisme diagonalisable de E.
8.c. Calculer une base orthonormée de E formée par des vecteurs propres de u dans le cas $n = 3$.

Mots-clés : Espace euclidien, produit scalaire, orthonormalisation de Gram-Schmidt, endomorphismes auto-adjoints, matrices symétriques et orthogonales.