

Examen “Groupes et Géométrie” du 29 juin 2015

3 heures

La correction tiendra compte de la clarté et de la concision de la rédaction.

L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

* *
*

Exercice 1. Groupe linéaire et droite projective sur un corps premier.

Soient p un nombre premier, \mathbb{F}_p le corps à p éléments et $G = Gl_2(\mathbb{F}_p)$ le groupe des matrices 2×2 inversibles à coefficients dans \mathbb{F}_p . On note $U = U_2(\mathbb{F}_p)$ le sous-groupe des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que $a_{1,2} \in \mathbb{F}_p$, $a_{2,1} = 0$ et $a_{1,1} = a_{2,2} = 1$.

- Montrer que le \mathbb{F}_p -espace vectoriel $(\mathbb{F}_p)^2$ possède $(p^2 - 1)(p^2 - p)$ bases vectorielles. En déduire l'ordre du groupe G .
- Montrer que U est un p -Sylow de G et que U n'est pas distingué dans G .
- Montrer que tout élément d'ordre p de G est conjugué à un élément de U .
- On note T le sous-groupe des matrices scalaires inversibles $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{F}_p^\times$, de G .
Montrer que T est distingué dans G . Quel est l'ordre du groupe-quotient G/T ?
- On rappelle que la droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$ est l'ensemble des droites vectorielles du \mathbb{F}_p -espace vectoriel $(\mathbb{F}_p)^2$. Montrer que le cardinal de $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$ est $p + 1$. En faisant agir G sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$, construire un morphisme de groupes $\varphi : G \rightarrow \mathfrak{S}_{p+1}$.
- Montrer que $\text{Ker}(\varphi) = T$. En déduire un morphisme de groupes injectif $\psi : G/T \rightarrow \mathfrak{S}_{p+1}$. Montrer que ψ est un isomorphisme pour $p = 2, 3$.

* *
*

Exercice 2. Soit D_8 le groupe diédral à 8 éléments, c'est-à-dire le sous-groupe de $O(2)$ engendré par la rotation ρ d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la symétrie orthogonale σ qui envoie (x, y) sur $(x, -y)$.

- Décrire géométriquement l'élément $\sigma\rho\sigma^{-1}$.
- Soit X l'ensemble des points $\{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$.
Vérifier que pour tout $x \in X$, on a $\rho(x) \in X$ et $\sigma(x) \in X$.
On en déduit une action $D_8 \times X \rightarrow X$.
- En identifiant X à l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, en déduire un morphisme de groupes $\varphi : D_8 \rightarrow \mathfrak{S}_4$. Expliciter $\varphi(\sigma)$ et $\varphi(\rho)$.
- Montrer que φ est *injectif*.
- En déduire que $\varphi(D_8)$ est un 2-Sylow de \mathfrak{S}_4 .

* *
*

Exercice 3. On considère les points $A = (1, 1, 0)$, $B = (-1, 1, 0)$, $C = (-1, -1, 0)$, $D = (1, -1, 0)$, $E = (0, 0, 1)$, $F = (0, 0, -1)$ de \mathbb{R}^3 . On note H le plan contenant A, B, C, D et s_H la réflexion orthogonale de \mathbb{R}^3 admettant H comme plan de symétrie.

- Montrer que s_H applique les segments $[A, E]$, $[B, E]$, $[C, E]$ et $[D, E]$ sur les segments $[A, F]$, $[B, F]$, $[C, F]$ et $[D, F]$. Montrer que ces segments ont tous la même longueur.
- Montrer que les segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$ ont tous la même longueur. En déduire que chacun de ces quatre segments forme la base de deux triangles isocèles, l'un ayant un sommet en E , l'autre en F . Décrire l'action de s_H sur l'ensemble de ces triangles.

- c)* On note P l'enveloppe convexe de $\{A, B, C, D, E, F\}$. Déterminer le nombre de faces et le nombre d'arêtes du polyèdre P . Vérifier la formule d'Euler. Le polyèdre P est-il régulier ?
- d)* Montrer qu'une transformation orthogonale de \mathbb{R}^3 qui préserve P , préserve nécessairement les ensembles $\{A, B, C, D\}$ et $\{E, F\}$. En déduire que le sous-groupe de $O(3)$ des isométries de P s'identifie au produit direct du groupe diédral D_8 et de \mathfrak{S}_2 .
- e)* Quelle dilatation faut-il appliquer à A, B, C, D (en fixant E et F) pour obtenir une enveloppe convexe \tilde{P} qui soit un polyèdre régulier ? De quel polyèdre régulier s'agit-il ? Le groupe des symétries orthogonales de \tilde{P} est-il plus grand ou plus petit que celui de P ?

* *
*

BARÈME INDICATIF : 6.5 + 6.5 + 7