Feuille d'exercices n^{o}4

MESURES.

On appelle *anneau* $\mathcal{A}$ sur un ensemble X toute collection $\mathcal{A}$ de parties de X telle que

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $A \cup B \in \mathcal{A}$;
3. Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $B \backslash A \in \mathcal{A}$.

Un anneau $\mathcal{A}$ sur X contenant X s'appelle *algèbre* sur X. On appelle *mesure* μ sur un anneau $\mathcal{A}$ toute application $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ si $A \cap B = \emptyset$;
3. Si $A_n \uparrow A$, $A_n \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$ alors
$$\mu(\bigcup_n A_n) = \sup_n \mu(A_n).$$

a. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{A}$ on a $A \cap B \in \mathcal{A}$.

b. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{A}$ on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

c. Montrer que l'ensemble des réunions finies disjointes d'intervalles bornés est un anneau sur $\mathbb{R}$. Construire une mesure finie sur cet anneau.

d. Montrer qu'une algèbre sur X est une tribu sur X si et seulement si pour tout $A_n \uparrow A$ avec $A_n \in \mathcal{A}$ on a $A \in \mathcal{A}$.

e. Montrer que si $\mathcal{A}$ est une tribu alors les deux notions de mesure sur $\mathcal{A}$ que vous connaissez coïncident.

f. Montrer $\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$ pour $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$.

On suppose dorénavant que $\mathcal{A}$ est une *algèbre* sur X et que μ est une *mesure* sur $(X, \mathcal{A})$. On dit qu'une partie Y de X est λ-*bornée* s'il existe une suite croissante $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $\mu(A_n) \leq \lambda$ et $Y \subset \bigcup_n A_n$.

g. Montrer que si $Y \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$ avec $A_i \in \mathcal{A}$ pour $i = 1, \ldots, n$, et $\mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n) \leq \lambda$ alors Y est λ-bornée.

h. Montrer que si $Y \subset \bigcup_n A_n$ avec $A_n \in \mathcal{A}, \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ et $\sum_n \mu(A_n) \leq \lambda$, alors Y est λ-bornée.

i. Montrer que si Y est λ-bornée alors il existe $(B_n)_{n\geq 0}$ suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $Y \subset \bigcup_n B_n$, $\bigcup_n B_n \in \mathcal{A}$ et $\sum_n \mu(B_n) \leq \lambda$.

j. On pose pour $Y \in \mathcal{P}(X)$: $\mu^*(Y) = \inf\{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mid Y \text{ est } \lambda\text{-bornée}\}$. Montrer que pour $A \in \mathcal{A}$ on a $\mu(A) = \mu^*(A)$.

k. Montrer que pour $Y_1 \subset Y_2$ on a $\mu^*(Y_1) \leq \mu^*(Y_2)$. Montrer que pour $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathcal{P}(X)$ on a $\mu^*(Y_1 \cup \cdots \cup Y_n) \leq \mu^*(Y_1) + \cdots + \mu^*(Y_n)$.

l. Montrer enfin que $\mu^*(\bigcup_n Y_n) \leq \sum_n \mu^*(Y_n)$ pour toute famille dénombrable (Y_n) de parties de X.

m. Montrer que la restriction de μ^* à la tribu $\sigma(\mathcal{A})$ engendrée par l'algèbre $\mathcal{A}$ est une mesure, c'est-à-dire que $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu^*_{|\sigma(\mathcal{A})})$ est un *espace mesuré*.

Remarque. La fonction $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ s'appelle la *mesure extérieure* associée à $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. La mesure extérieure n'est pas une mesure sur $\mathcal{P}(X)$!!