La lettre E désigne, sauf mention contraire, un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

Exercice 1 EXERCICE DE REDACTION
Compléter les trous :
Soient $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ des scalaires deux à deux distincts.
Pour $i \in [[0, n]]$, on pose

$$L_i = \frac{(X - a_0) \cdots (X - a_{i-1})(X - a_{i+1}) \cdots (X - a_n)}{(a_i - a_0) \cdots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(X - a_j)}{(a_i - a_j)}$$

................$(L_0, \dots L_n)$ est une base de $K_n[X]$.
....$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0$.
On a.................................$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x) = 0$.
Pour $x = a_j$ $(j \in [[1, n]])$, ... $\lambda_j = 0$ .... $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
La famille $(L_0, \dots L_n)$ est ....libre et .... $\text{card}\{L_0, \dots, L_n\} = n+1 = \dim K_n[X]$, on ....

N.B : Les polynômes L_i sont appelés **polynômes d'interpolation de Lagrange** et reviendront tôt ou tard au cours de l'année/concours...★

Exercice 2 Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant
$F + G \subset F + H$, $F \cap G \subset F \cap H$ et $H \subset G$.
Etablir que $G = H$.

Exercice 3 Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose $F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$,
$G = \{P \in E,\ P(3) = P(1) = P(2) = 0\}$, $H = \{P \in E,\ P(X) = P(-X)\}$.
Montrer que ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Exercice 4 Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère l'ensemble F des applications de la forme
$x \mapsto a \cos x + b \sin x$, où a et b décrivent $\mathbb{R}$.
1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et en exhiber une base.
2) Ici, F désigne l'ensemble des applications de la forme $x \mapsto P(x) \cos x + Q(x) \sin x$, où P et Q décrivent $\mathbb{R}_n[X]$. Que peut-on dire de F ?

Exercice 5 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
1) $\text{Im}\, f$ et $\text{Ker}\, f$ sont supplémentaires dans E ;
2) $E = \text{Im}\, f + \text{Ker}\, f$;
3) $\text{Im}\, f^2 = \text{Im} f$;
4) $\text{Ker}\, f^2 = \text{Ker} f$.

Exercice 6 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on pose $I_p = \operatorname{Im} f^p$ et $N_p = \operatorname{Ker} f^p$.

1) Montrer que les suites $(I_p)_{p\geq 0}$ et $(N_p)_{p\geq 0}$ sont respectivement décroissante et croissante, et qu'elles sont simultanément stationnaires.
2) On note r le rang à partir duquel les deux suites sont stationnaires. Montrer que $I_r \oplus N_r = E$.

Exercice 7 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f^2 = Id$. Montrer

$$\operatorname{Ker}(f - Id) \oplus \operatorname{Im}(f - Id) = E.$$

Exercice 8 Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose
$F = \{f \in E \,|\, f(x) = 0 \, \forall x \geq 0\}$, $G = \{f \in E \,|\, f(x) = 0 \, \forall x \leq 0\}$, $H = \{f \in E \,|\, f \text{ constant}\}$.
Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 9 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. Montrer que la famille $(Id, f, f^2, \ldots, f^{n^2})$ est liée. En déduire l'existence d'un polynôme non nul qui annule f.

Exercice 10 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme nilpotent non nul de E et p le plus petit entier tel que $f^p = 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ soit libre. En déduire que $f^n = 0$.

Exercice 11 Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (avec $\dim E < +\infty$) nilpotent et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.
a) Etablir que pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, il existe un sous-espace vectoriel F_k de E tel que $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k-1} \oplus F_k$.
b) Etablir que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.
c) Observer que la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe ci-dessus est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls.

Exercice 12 Soient u et v des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
1) Si $u \circ v = v \circ u$, montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.
2) Soit u un projecteur de E. Montrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.
3) ★ Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}(u)$ des endomorphismes de E qui commutent avec u ("centre de u").

Exercice 13 1) Montrer que le rang d'un projecteur est égal à sa trace.
2) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $p_1, \ldots, p_m$ des projecteurs de E dont la somme vaut Id_E. On note $F_1, \ldots, F_m$ les images de $p_1, \ldots, p_m$. Montrer que

$$E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k.$$

Exercice 14 1) On considère dans $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble F des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où a, b, c décrivent $\mathbb{R}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ dont on précisera une base et la dimension.
2) Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ de dimension 4 ? de dimension 9 ? de dimension 10 ?Si oui, en "fabriquer" un.

Exercice 15 Calculer le rang d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ où $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = 0$ si $i+j = n+1$, et $a_{ij} = \alpha \in \mathbb{K}$ sinon.

Exercice 16 Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.
1) Montrer que $\text{rg}(A) = 1$ si et seulement si $\exists X \in M_{m,1}(\mathbb{K})$ et $\exists Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls tels que $A = X^tY$. Calculer alors le noyau et l'image de A.
2) Si $m = n$ et $\text{rg}(A) = 1$, calculer A^2.

Exercice 17 ★ Soient $A \in Gl_p(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in M_q(\mathbb{R})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{q,p} & C \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R}).$$

Déterminer le rang de M en fonction de celui de C.

Exercice 18 Soient A et B dans $M_n(\mathbb{C})$, avec A non nulle.
Résoudre l'équation $X + \text{tr}(X)A = B$, d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 19 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{tr}(AMN) = \text{tr}(MAN)$ pour toutes matrices M et N dans $M_n(\mathbb{K})$.
Montrer que A est une matrice scalaire (*i.e.* multiple de l'identité). (remplacer M et N par des matrices "bien" choisies !)

Exercice 20 Soient $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les rangs de A et de B. (on pourra travailler par blocs)
2) Montrer que $BA = I_2$ (on pourra travailler par blocs).

Exercice 21 Soit $u \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$ où $u(M) = {}^tM \, \forall M \in M_n(\mathbb{K})$. Calculer $\text{rg}(u)$ et $\text{tr}(u)$.
(Se placer dans une base adaptée et écrire la matrice de u dans cette base)

Exercice 22 Soit T une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}),\ T(AB) = T(BA).$$

Montrer que T est un multiple de la trace (on pourra utiliser qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base).

Exercice 23 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculer A^2, puis en déduire un polynôme annulateur de A.
2) Calculer A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3)Montrer que A est inversible et préciser son inverse.
4) Calculer A^k, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
5) Montrer que $F = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ et $G = \mathrm{Ker}(A - 4I_3)$ sont supplémentaires dans K^3.
6) On note p le projecteur sur F parallèlement à G, q le projecteur associé à p, P et Q les matrices de p et q dans la base canonique de K^3.
Montrer que $A = P + 4Q$ et en déduire une nouvelle méthode de calcul de A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 24 Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et u l'endomorphisme de dérivation de E.
Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels de dimension finie de E stables par u sont les $\mathbb{R}_n[X]$ et 0.

Exercice 25 1) Montrer que si M est une matrice antisymétrique d'ordre impair, alors son déterminant est nul.

2) Montrer que si M est une matrice nilpotente, alors son déterminant est nul.

3) On note $\mathcal{S}l_n(K)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ de déterminant 1.

Montrer que $\mathcal{S}l_n(K)$ est un groupe multiplicatif (*i.e.* contient l'identité et est stable par multiplication et passage à l'inverse)
Montrer que $\forall M \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C}), \exists \lambda \in \mathbb{C}, \exists S \in \mathcal{S}l_n(\mathbb{C})$ tels que $M = \lambda S$.

Exercice 26 Calculer $D = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos 2\alpha \\ \cos\alpha & \cos 2\alpha & \cos 3\alpha \\ \cos 2\alpha & \cos 3\alpha & \cos 4\alpha \end{vmatrix}$ (formule ... $\cos(a+b) + \cos(a-b)$)

Exercice 27 Soient a et b deux réels et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{pmatrix}$.
1) Calculer le déterminant et le rang de A si $a = 1$ et $b = 2$.
2) Calculer le déterminant de A dans le cas général.
3) Discuter la valeur du rang de A suivant les valeurs de a et b.
4) Dans le cas où A est inversible, calculer son inverse.

Exercice 28 On considère ici les matrices M et A_1 définies par

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ et } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où a, b, et c sont des complexes. M est *une matrice circulante d'ordre* 3.

1. Vérifier que M est un polynôme en A_1.
2. Soit $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ où j est le complexe $j = e^{2i\pi/3}$.
   a. Calculer $\det(\Omega)$. En déduire que Ω est inversible.
   b. Calculer $M\Omega$.
   c. Déterminer une matrice diagonale D telle que $M\Omega = \Omega D$.
   d. En déduire le déterminant de M.
   e. Généraliser en dimension n ?

Exercice 29 ★Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des complexes distincts et $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. Calculer :

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} \frac{P(X)}{X-\lambda_1} & \frac{P(X)}{X-\lambda_2} & \cdots & \frac{P(X)}{X-\lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Exercice 30 Pour $a \in \mathbb{K}^\star$, calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & a & 2a \end{vmatrix}$$

Exercice 31 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & 1 & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

Exercice 32 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.