La lettre K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I la matrice identité.

Exercice 1 Soient E un K-espace vectoriel et F, G, H trois sous-espaces vectoriels tels que : $F + G = F + H$, $F \cap G = F \cap H$ et $G \subset H$. Montrer que $G = H$.

Exercice 2 Dans l'espace vectoriel E des suites réelles convergentes, on considère les parties : $F = \{\text{suites de limite nulle}\}$ et $G = \{\text{suites constantes}\}$. Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires dans E.

Exercice 3 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $\phi : E \to E$ et $\psi : E \to E$ les applications définies par :

$$\phi(f) = f' \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} : \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

a) Montrer que ϕ et ψ sont des endomorphismes de E.
b) Exprimer $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$.
c) Déterminer images et noyaux de ϕ et ψ.

Exercice 4 Soient f et g des endomorphismes d'un K-espace vectoriel.

a) Comparer $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ et $\text{Ker}(f + g)$.
b) Comparer $\text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ et $\text{Im}(f + g)$.
c) Comparer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f^2)$.
d) Comparer $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f^2)$.

Exercice 5 Soient E un K-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0$.

a) Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
b) Etablir que les noyaux $\text{Ker}(f - Id)$ et $\text{Ker}(f - 2Id)$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

Exercice 6 Soient E un K-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E qui commutent. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E. En déterminer noyau et image.

Exercice 7 Soit

$$F = \{P \in K_4[X] \,|\, \exists (a, b, c) \in K^3 : P = a + (2a - 3b)X + cX^2\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $K[X]$ et en donner une base.

Exercice 8 Soit $f : x \mapsto ae^x + b\text{ch}x + c\tan x$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0. En déduire que les fonctions exp, ch et tan sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 9 Soit f l'application de $K_n[X]$ dans K^{n+1} qui à P associe $(P(0), P(1), \ldots, P(n))$. Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 10 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que deux hyperplans de E admettent un supplémentaire commun.

Exercice 11 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $p_1, \ldots, p_m$ des projecteurs de E dont la somme vaut Id_E. On note $F_1, \ldots, F_m$ les images de $p_1, \ldots, p_m$. Montrer que

$$E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k.$$

Indication : on rappelle que le rang d'un projecteur égale sa trace.

Exercice 12 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note

$$F_i = \{P \in E / \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}, P(j) = 0\}$$

Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels et que

$$E = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n$$

Exercice 13 Soient $E_1, \ldots, E_n$ et $F_1, \ldots, F_n$ sous-espaces vectoriels de E tel que $E_i \subset F_i$ et

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i$$

Montrer que $E_i = F_i$.

Exercice 14 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$f(M) = MA$$

Exprimer la trace de f en fonction de celle de A.

Exercice 15 Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tel que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(K)$, $\varphi(M) = \operatorname{tr}(AM)$.

Exercice 16 Soit $E = \mathcal{M}_n(K)$. Etablir que $\ker(\mathrm{Tr}) = \mathrm{Vect}\{[A, B] / A, B \in E\}$ où on note $[A, B] = AB - BA$ (crochet de Lie).

Exercice 17 Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et

$$B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(K)$$

a) Montrer que A est inversible si et seulement si B est inversible.
b) Calculer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 18 Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $B \in \mathcal{M}_p(K)$ et M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & O_{n,p} \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$$

Etablir

$$\mathrm{rg} M = \mathrm{rg} A + \mathrm{rg} B$$

Exercice 19 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose l'existence d'un vecteur $x_0 \in E$ telle que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ soit libre.
Montrer que seuls les polynômes en u commutent avec u.

Exercice 20 Montrer qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E commute avec un projecteur p si, et seulement si, $\mathrm{Im} p$ et $\ker p$ sont stables par f.

Exercice 21 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et H un hyperplan.
Montrer que si $H = \ker \phi$, alors H est stable par f si, et seulement si, $\phi \circ f$ est proportionnelle à ϕ.

Exercice 22 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, puis en déduire un polynôme annulateur de A.
2. Calculer A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que A est inversible et préciser son inverse.
4. Calculer A^k, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
5. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ et $G = \mathrm{Ker}(A - 4I_3)$ sont supplémentaires dans K^3.
6. On note p le projecteur sur F parallèlement à G, q le projecteur associé à p, P et Q les matrices de p et q dans la base canonique de K^3.
Montrer que $A = P + 4Q$ et en déduire une nouvelle méthode de calcul de A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 23 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 = I$.
Montrer que $\ker(u - \mathrm{Id}) \oplus \ker(u^2 + u + \mathrm{Id}) = E$

Exercice 24 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$$

Soient P et $Q \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes annulateurs de A et B respectivement.
Déterminer, en fonction de P et Q, un polynôme annulateur de M.

Exercice 25 Calculer $\det(M)$ pour $M = (\sin(a_i + a_j))$, où $a_1, \ldots, a_n$ sont n réels.

Exercice 26 On considère ici les matrices M et A_1 définies par

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ et } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où a, b, et c sont des complexes. M est *une matrice circulante d'ordre* 3.

1. Vérifier que M est un polynôme en A_1.
2. Soit $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ où j est le complexe $j = e^{2i\pi/3}$.
   a. Calculer $\det(\Omega)$. En déduire que Ω est inversible.
   b. Calculer $M\Omega$.
   c. Déterminer une matrice diagonale D telle que $M\Omega = \Omega D$.
   d. En déduire le déterminant de M.

Exercice 27 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\psi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ défini par $\psi_A(M) = AM$.

Calculer la trace et le déterminant de ψ_A.

Exercice 28 Soient a_0, ... , a_{n-1} n nombres complexes et $A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(A - xI_n)$.

Exercice 29 Calculer les déterminants suivants :

1. $\det(A)$ où $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est telle que $a_{i,i} = a$ et $a_{i,2n+1-i} = b$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.
2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a & b & \ldots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & b & a \end{vmatrix}$ $(n \geqslant 2)$.
3. $\begin{vmatrix} 1 & \ldots & & \ldots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $(n \geqslant 2)$