La rédaction est tout aussi importante que la résolution.
Dans une grande marge à gauche, vous noterez le code suivant A ou B ou C ou D ou E. A signifie : j'ai su faire ; B je n'ai pas su finir, il m'a manqué ...(à préciser) ; C : je n'ai pas réussi car je n'ai vu une simplification de calcul ; D : je n'ai pas réussi car je ne connais pas mon cours ! ; E : je n'ai pas su commencer.

1. Démontrer que $\forall x \in [0, \pi/2], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ (**formules à savoir**).

2.a. Montrer que la fonction ch établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$. On appelle argch sa réciproque. Quelle est la dérivée de argch ? Tracer la courbe représentative de argch.
2.b. Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$, $\text{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
2.c. Montrer que la fonction th établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. On appelle argth la fonction réciproque. Montrer que argth est dérivable sur $]-1, 1[$ et donner sa dérivée.
2.d. Exprimer argth à l'aide de la fonction ln.

3. Résoudre sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, \infty[$.

3.a. $(x - 1)y' + xy = \sin x$.
3.b. $(x - 1)y' + xy = \sin x + x$.

4. Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant les solutions réelles s'il y a lieu.

4.a. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^x$.
4.b. $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

5. Déterminer les limites des suites suivantes, de terme général :

5.a. $u_n = \frac{4n^2+(-1)^n}{3n^2+\sin(3n)-1}$
5.b. $u_n = (1 + \frac{x}{n})^n$, où x est un réel.
5.c. $u_n = \frac{n!}{n^n}$

6. Etudier la convergence des suites définies par :
6.a. $u_n = n^3 x^n$, où $x > 0$.
6.b. $u_n = \frac{x^n}{n!}$, où $x > 0$.

7. Donner des équivalents des suites définies par leur terme général :
7.a. $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$
7.b. $u_n = \ln(2n + \sqrt{n^2 + 4n + 5})$
7.c. $u_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{n}}$

8. En utilisant les équivalents, déterminer les limites en x_0 des fonctions f suivantes, définies par :

8.a. $f(x) = (\tan(\pi x))(4x^2 - 1), \quad x_0 = \frac{1}{2}.$

8.b. $f(x) = (\tan x)^{\frac{1}{\cos 2x}}, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$

8.c. $f(x) = \frac{1}{x} \ln(\frac{\mathrm{ch} x}{x}), \quad x_0 = +\infty.$

8.d. $f(x) = \frac{\ln(\cos 5x)}{\tan^2 x}, \quad x_0 = 0.$

8.e. $f(x) = \frac{(1-\cos x)\arcsin x}{2x^3+4x^5}, \quad x_0 = 0.$

9. Donner un équivalent simple de f au voisinage de 0 :

9.a. $f(x) = \cos(\sin x).$

9.b. $f(x) = \ln(\cos x).$

9.c. $f(x) = \ln(\sin x).$

9.d. $f(x) = a^x - b^x \quad (a > 0, b > 0).$

10. Calculer le :
10.a. $\mathrm{DL}_n(-1)$ de $f(x) = \frac{1}{x}$. $(n \in \mathbb{N})$
10.b. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x) = (1 - x + x^2)^{\frac{1}{x}}.$
10.c. $\mathrm{DL}_5(0)$ de $f(x) = (\arcsin x)^2.$
10.d. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f(x) = \frac{\arctan x}{\arcsin x}.$

11. Etudier la convergence des séries de terme général u_n :

11.a. $u_n = \frac{1}{n \cos^2 n}$;
11.b. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}.$

12. Calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

13. Calculer les intégrales suivantes :

13.a. $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{1}{x^2+5} dx$; **13c** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3-2x^2}} dx$;

13.b. $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$(poser $t = \cos x$) ; **13d**$\int_{\ln 2}^1 \frac{e^x}{(e^x+3)(\sqrt{e^x-1})} dx$ (poser $t = \sqrt{e^x - 1}$).

14. Soit f une fonction dérivable et strictement croissante sur $[0, b]$, s'annulant en 0.
14.a. Justifier l'existence d'une fonction réciproque g et préciser son ensemble de définition.
14.b. Pour $x \in [0, b]$, on pose $\phi(x) = \int_0^x f + \int_0^{f(x)} g$. Montrer que ϕ est dérivable, puis calculer sa dérivée. Quelle est l'expression de ϕ ? (**théorème fondamental de l'analyse ou théorème fonction de la borne supérieure, à savoir par coeur ! ! !**)

15. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calculer le reste de la division euclidienne de $P = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$ par :
15.a. $(X - 3)(X - 2)$;
15.b. $(X - 2)^2$;

16. Déterminer une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $X^{2n} + X^n + 1$ soit divisible par $X^2 + X + 1$ (revoir polynôme et racines).

17. Soit $F = \{f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \int_a^b f(t)dt = 0\}$.
17.a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
17.b. Montrer que l'ensemble des fonctions constantes est un supplémentaire de F dans $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (revoir la métode "analyse-synthèse").

18. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose :
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + 3z = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{(1, -1, 1)\}$.
18.a. Déterminer $F \cap G$ et $F + G$.
18.b. Déterminer la projection sur F parallèlement à G et la projection sur G parallèlement à F.

19. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice dans la base canonique $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
19.a. Déterminer la matrice de f dans la base $((1, 1), (1, -1))$.
19.b. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
19.c Déterminer l'ensemble des suites réelles (x_n, y_n) vérifiant pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{cases}$$

20. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On considère un espace vectoriel E, une base $\mathcal{B}$ de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ telles que $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.
20.a. Trouver trois vecteurs u_p de E tels que $f(u_p) = p\ u_p$, $p \in \{0, 1, 2\}$.
20.b. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de E et une matrice diagonale Δ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \Delta$.
20.c. Déterminer la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et expliciter la relation entre M, Δ et P.

21. On considère l'endomorphisme Ψ de $K[X]$ défini par $\Psi(P) = P + P' + P''$, où $P \in K[X]$.
21.a. Montrer que Ψ est injectif.
21.b. Montrer que Ψ est surjectif.

22. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on définit, pour deux polynômes P et Q, le réel
$(P/Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E et déterminer une base orthonormale.

23. Une urne contient 8 boules turquoise et deux boules roses.
On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.
Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit turquoise ?

Physique - Chimie
PSI 2018 – 2019

Le plus important : TIPE

Dès les premières semaines vous devrez faire une présentation de votre TIPE.

Il faut donc arriver en septembre avec un sujet (c'est une évidence !) et un diaporama (5 diapos) pour présenter votre TIPE :

- *Titre, ancrage au thème de l'année et motivation du choix de l'étude*
- *Problématique retenue*
- *Objectifs du TIPE*
- *Expériences envisagées (<u>AVEC SOURCES PRECISES</u>)*
- *Liste de références bibliographiques*

Cette présentation durera environ 5mn.

Attention, le TIPE devra être fini avant les écrits (début avril). Il ne sera pas possible cette année de manipuler au mois de mai et juin.

Autre point très important

L'année de Spé est courte jusqu'aux écrits, et les programmes sont intéressants mais denses : le démarrage sera donc rapide, dès le jour de la rentrée, et le rythme encore plus soutenu qu'en Sup. Pour tirer profit au maximum de cette année, il faudra donc arriver avec un cerveau en état de marche et le minimum de lacunes : pour cela, je vous demande de procéder à des révisions sérieuses de tout le programme de première année, en commençant environ deux semaines avant la rentrée.

L'année de spéciale est très fatigante. Il faut donc aussi arriver en pleine forme.

Reposez-vous et BONNES VACANCES.

JC Boivin

CPGE scientifiques 2ème année-Français-philosophie
-classe de 935 -cours de P. Desoche
Travaux d'été à destination des futurs élèves de Maths spé : PSI

Thème 2018-2019 : L'Amour

ŒUVRES DU PROGRAMME - lectures obligatoires :

1. ***Le banquet*** de Platon (Traduction Luc Brisson), éditions GF Flammarion

2. ***Le songe d'une nuit d'été*** de William Shakesperare (Traduction Jean-Michel Déprats)), Collection Folio théâtre, Gallimard

3. ***La chartreuse de Parme*** de Stendhal, édition GF Flammarion

Ces trois ouvrages doivent être lus et fichés durant l'été : ils feront tous les trois l'objet d'un ***contrôle de lecture*** *dès la rentrée de septembre.*

Il est impératif de se procurer ces trois œuvres dans les éditions indiquées *:* les références que nous ferons en cours à ces œuvres renverront aux pages de ces éditions.

Au plaisir de travailler avec vous à la rentrée. Bon travail et bel été.