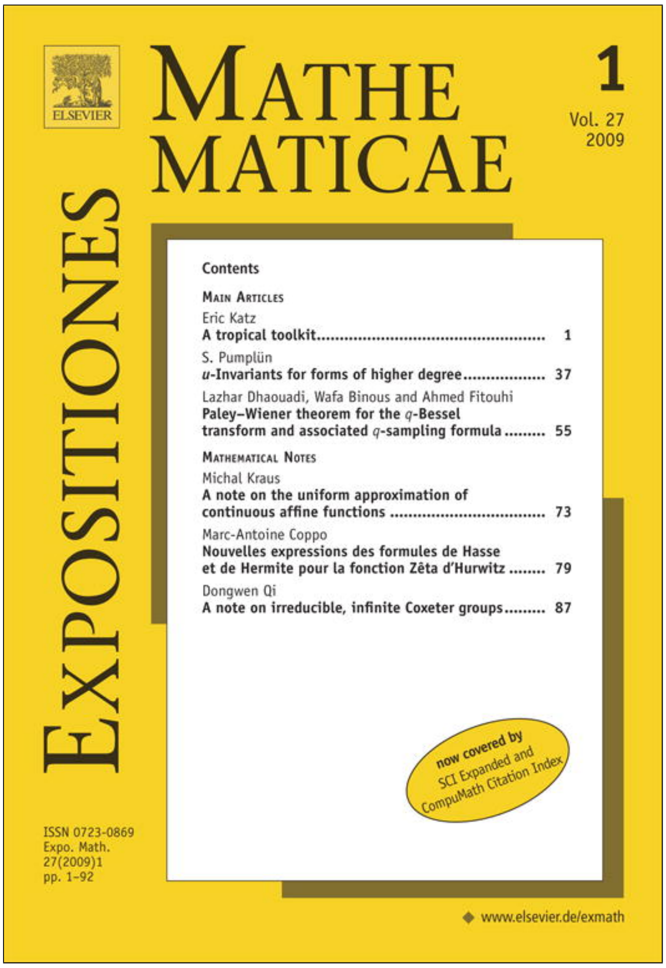
EXPOSITIONES
MATHEMATICAE
1
Vol. 27
2009
Contents
MAIN ARTICLES
Eric Katz
A tropical toolkit 1
S. Pumplün
u-Invariants for forms of higher degree 37
Lazhar Dhaouadi, Wafa Binous and Ahmed Fitouhi
Paley–Wiener theorem for the q-Bessel transform and associated q-sampling formula 55
MATHEMATICAL NOTES
Michal Kraus
A note on the uniform approximation of continuous affine functions 73
Marc-Antoine Coppo
Nouvelles expressions des formules de Hasse et de Hermite pour la fonction Zêta d'Hurwitz 79
Dongwen Qi
A note on irreducible, infinite Coxeter groups 87
now covered by SCI Expanded and CompuMath Citation Index
ISSN 0723-0869
Expo. Math.
27(2009)1
pp. 1–92
www.elsevier.de/exmath

Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
Expo. Math. 27 (2009) 79 – 86
EXPOSITIONES MATHEMATICAE
www.elsevier.de/exmath

Nouvelles expressions des formules de Hasse et de Hermite pour la fonction Zêta d'Hurwitz

Marc-Antoine Coppo

CNRS - Université de Nice-Sophia Antipolis, Laboratoire J.A. Dieudonné, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 2, France

Received 4 February 2008; received in revised form 15 April 2008

Abstract

This article presents an interesting relation between the Hurwitz zeta function $\zeta(s, x)$ and a modification of the Bell polynomials through the rewriting of two classical identities discovered by Hasse and Hermite, respectively. Some applications of these new expressions to Euler's sums are also underscored.

MSC 2000: primary 11M35; secondary 40-02;40-03

1. Introduction

La fonction zêta d'Hurwitz (cf. [1, 1.3.1]) est définie pour $\Re(s) > 1$ et $x > 0$ par la série:

$$\zeta(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + x)^s}.$$

Introduite en 1882 par Hurwitz,[1] cette fonction a fait l'objet au cours des decennies qui ont suivi (et jusqu'aux années 1930) de travaux devenus classiques de Lerch, Mellin,

E-mail address: Marc-Antoine.Coppo@unice.fr.

[1] *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXVII.

0723-0869/$ - see front matter
doi:10.1016/j.exmath.2008.04.004

Hermite et Hasse. En sommant pour $n \geqslant 0$ l'expression:

$$\frac{\Gamma(s)}{(n+x)^s} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+x)t} t^{s-1}\,\mathrm{d}t$$

on obtient la représentation intégrale:

$$\zeta(s,x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt} t^{s-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

qui fait apparaitre $\zeta(s,x)$ comme une transformée de Laplace (en x) et comme une transformée de Mellin (en s).

L'apparition des polynômes de Bell (cf. [7, chapitre 5]) remonte quant à elle au milieu du 19ème siècle avec les travaux de Faà de Bruno (cf. [5] pour une approche historique). Dans ce travail, nous considérerons une forme modifiée de ces polynômes, définis par la fonction génératrice:

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x_1,\ldots,x_n) t^n. \tag{2}$$

Les premiers polynômes de Bell modifiés sont les suivants:

$$P_0 = 1\, P_1(x_1) = x_1;\ P_2(x_1,x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2);$$

$$P_3(x_1,x_2,x_3) = \tfrac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3) \text{ etc.}$$

Il y a une dizaine d'années, on s'est aperçu que ces polynômes intervenaient en Physique mathématique où ils permettent de donner une représentation explicite des équations de Korteweg de Vries et de Kadomtsev-Petvisashvili (cf. la proposition 8 dans [8]).

L'objet de cet article est d'établir une intéressante connexion entre la fonction $\zeta(s,x)$ et les polynômes $P_n(x_1,\ldots,x_n)$ au travers de la reformulation de deux identités classiques, respectivement dues à Hasse (cf. [3, p. 461]) et Hermite (cf. [4, p. 540]):

Théorème 1. *Soit* $P_n(x_1,\ldots,x_n)$ *le n-ème polynôme de Bell modifié défini par* (2). *Soit* $h_m(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+x)^m}$. *Soit* $\lambda_{n+1} = \int_0^1 x(1-x)\cdots(n-x)\,\mathrm{d}x$. *Pour tout entier* $s>1$ *et tout réel* $x>0$, *on a*:

$$(s-1)\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)x(x+1)\cdots(x+n)} P_{s-2}(h_1(x),\ldots,h_{s-2}(x)) \tag{3}$$

et

$$\zeta(s,x) - \frac{1}{(s-1)\,x^{s-1}} = \frac{1}{2x^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{(n+1)x(x+1)\cdots(x+n)} \times P_{s-1}(h_1(x),\ldots,h_{s-1}(x)). \tag{4}$$

Remarquons que l'identité (4) se prolonge en $s = 1$ par la formule:

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s,x) - \frac{1}{(s-1)x^{s-1}}\right) = \ln x - \psi(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{(n+1)x(x+1)\cdots(x+n)},$$

où ψ désigne la fonction digamma d'Euler (cf. [1, 1.2]), ce qui donne en particulier pour $x = 1$ la somme classique (cf. [6, p. 280]) pour la constante d'Euler:

$$-\psi(1) = \gamma = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}.$$

Indiquons à présent quelques cas particuliers remarquables de la formule (3) pour de petites valeurs de s. Pour $s = 2$, l'identité (3) s'écrit:

$$\zeta(2,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{5}$$

ce qui donne en spécialisant (5) en $x = \frac{1}{2}$:

$$\zeta\left(2, \frac{1}{2}\right) = 3\zeta(2) = \frac{\pi^2}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(n+1)(2n+1)!}.$$

Pour $s = 3$, l'identité (3) s'écrit:

$$2\zeta(3,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)x(x+1)\cdots(x+n)} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+x}. \tag{6}$$

En spécialisant (6) en $x = 1$, on retrouve la célèbre relation d'Euler (cf. [9]):

$$2\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2}$$

où H_n désigne le n-ème nombre harmonique. Enfin, en spécialisant (6) en $x = \frac{1}{2}$, on obtient:

$$\zeta\left(3, \frac{1}{2}\right) = 7\zeta(3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(n+1)(2n+1)!}\left(H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n\right).$$

D'autres applications intéressantes du Théorème 1 aux sommes d'Euler sont données à la fin de l'article.

2. Démonstration du Théorème 1

2.1. Propriétés des polynômes de Bell modifiés

Dans ce paragraphe nous introduisons les *polynômes de Bell modifiés* (qui sont appelés polynômes de Schur dans [8]) puis nous démontrons un lemme crucial dans la démonstration du Théorème 1.

Les polynômes de Bell $B_n(x_1, \dots, x_n)$ peuvent être définis récursivement par la formule:

$$B_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x_1, \dots, x_k) x_{n+1-k}, \qquad B_0 = 1 \tag{7}$$

Ils vérifient la *formule exponentielle* (cf. [7]):

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x_1, \dots, x_n) \frac{t^n}{n!}. \tag{8}$$

La formule de récurrence (7) permet de donner une expression déterminantielle des polynômes de Bell (cf. [5,8]):

$$B_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} x_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & x_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 2x_2 & x_1 & -1 & \cdots & 0 \\ x_4 & 3x_3 & 3x_2 & x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & -1 \\ x_n & \binom{n-1}{1} x_{n-1} & \binom{n-1}{2} x_{n-2} & \binom{n-1}{3} x_{n-3} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} x_1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1. Les polynômes de Bell modifiés $P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont définis par la relation:

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} B_n(0!x_1, 1!x_2, \dots, (n-1)!x_n).$$

Ils vérifient donc la formule exponentielle modifiée:

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x_1, \dots, x_n) t^n. \tag{9}$$

Lemme 1. *Pour tout* $m \geqslant 0$ *et* $x > 0$, *on a l'identité*:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} (1 - \mathrm{e}^{-t})^n \frac{t^m}{(m)!} \, \mathrm{d}t = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} P_m(h_1(x), \dots, h_m(x)) \tag{10}$$

avec $h_j(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+x)^j}$.

Démonstration. L'identité (10) s'obtient en dérivant m fois par rapport à x l'identité eulérienne (cf. [1, 1.1.27]):

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} (1 - \mathrm{e}^{-t})^n \, \mathrm{d}t = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Posons en effet:

$$S(n,0,x)=\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

et

$$S(n,m,x)=\frac{(-1)^m}{m!}\mathscr{D}^m S(n,0,x).$$

La série de Taylor de $S(n,0,x-t)$ en t à l'origine s'écrit:

$$S(n,0,x-t)=\sum_{m=0}^{\infty} S(n,m,x)t^m.$$

En écrivant:

$$\begin{aligned} S(n,0,x-t) &= S(n,0,x)\prod_{i=0}^{n}\left(1-\frac{t}{i+x}\right)^{-1} \\ &= S(n,0,x)\exp\left(-\sum_{i=0}^{n}\ln\left(1-\frac{t}{i+x}\right)\right) \end{aligned}$$

on déduit alors, en développant le logarithme en série entière, l'expression:

$$S(n,0,x-t)=S(n,0,x)\exp\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m(i+x)^m}\right).$$

c'est à dire:

$$\sum_{m=0}^{\infty} S(n,m,x)t^m = S(n,0,x)\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} h_m(x)\frac{t^m}{m}\right) \quad \text{avec} \quad h_m(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(i+x)^m}.$$

D'où, par identification avec (9) l'identité:

$$S(n,m,x)=S(n,0,x)P_m(h_1(x),\ldots,h_m(x)).$$

qui est équivalente à (10). □

2.2. Deux représentations intégrales de la fonction zêta d'Hurwitz

On commence par modifier quelque peu l'expression (1) donnée dans l'introduction.

Lemme 2. *On a les identités*:

$$(s-1)\zeta(s,x)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\left(\frac{t}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)\frac{t^{s-2}}{\Gamma(s-1)}\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

et

$$\zeta(s,x)-\frac{1}{(s-1)x^{s-1}}-\frac{1}{2x^s}=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)\frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}\,\mathrm{d}t. \tag{12}$$

Démonstration. Les identités précédentes se déduisent aisément de l'expression (1) dont elles constituent deux variantes. On notera que (11) est une expression meilleure que (1) car tous les termes qui figurent sous l'intégrale sont sous contrôle. $\square$

Lemme 3. *On a, pour $t > 0$, les développements*:

$$\frac{t}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}(1-\mathrm{e}^{-t})^n \tag{13}$$

et

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{(n+1)!}(1-\mathrm{e}^{-t})^n \quad \textit{où}$$

$$\lambda_{n+1} = \int_0^1 x(1-x)\cdots(n-x)\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

Démonstration. L'dentité (13) se déduit aisément (en posant $z=1-\mathrm{e}^{-t}$) du développement en série du logarithme:

$$-\frac{\log(1-z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)} \quad (|z|<1),$$

et l'identité (14) du développement en série du binôme:

$$(1-z)^x = 1 - xz - \sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)\cdots(n-x)\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \quad (|z|<1)$$

après intégration terme à terme entre $x=0$ et $x=1$. $\square$

2.3. Preuve des formules (3) et (4)

Le Théorème 1 résulte directement des lemmes 1, 2 et 3 précédents. En effet, par (11) et (13), on a:

$$(s-1)\zeta(s,x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}(1-\mathrm{e}^{-t})^n\right) \frac{t^{s-2}}{\Gamma(s-1)}\,\mathrm{d}t$$

ce qui, après permutation de $\int$ et $\sum$ (la série étant à termes positifs), s'écrit encore:

$$(s-1)\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}(1-\mathrm{e}^{-t})^n \frac{t^{s-2}}{\Gamma(s-1)}\,\mathrm{d}t.$$

On applique alors l'identité (10) avec $m = s-2$ ce qui donne la formule (3).

De même, par (12) et (14), on a:

$$\zeta(s,x) - \frac{1}{(s-1)\,x^{s-1}} - \frac{1}{2x^s} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{(n+1)!} (1-\mathrm{e}^{-t})^n \right) \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}\, \mathrm{d}t$$

ce qui, après permutation de $\int$ et $\sum$ (la série étant à termes positifs), s'écrit encore:

$$\zeta(s,x) - \frac{1}{(s-1)\,x^{s-1}} - \frac{1}{2x^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{(n+1)!} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} (1-\mathrm{e}^{-t})^n \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}\, \mathrm{d}t.$$

On applique alors l'identité (10) avec $m = s-1$ ce qui donne la formule (4).

3. Application aux sommes d'Euler

L'expression (facilement calculable) des polynômes P_n pour $n = 0, 1, 2, 3$:

$$P_0 = 1;\ P_1(x_1) = x_1;\ P_2(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2);$$

$$P_3(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3),$$

permet d'écrire la formule (3) sous une forme plus explicite pour $s = 2, 3, 4, 5$:

Corollaire 1. *Pour* $x > 0$, *on a*:

$$\zeta(2,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)x(x+1)\cdots(x+n)},$$

$$2\zeta(3,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)x(x+1)\cdots(x+n)} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+x},$$

$$6\zeta(4,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)x(x+1)\cdots(x+n)} \left[\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+x} \right)^2 + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+x)^2} \right],$$

$$24\zeta(5,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)x(x+1)\cdots(x+n)} \times \left[\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+x} \right)^3 + 3 \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+x)} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+x)^2} + 2 \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+x)^3} \right].$$

Des relations: $\zeta(s,1) = \zeta(s)$ et $\zeta(s, \frac{1}{2}) = (2^s - 1)\zeta(s)$ se déduisent alors les formules:

$$3\zeta(2) = \frac{\pi^2}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(n+1)(2n+1)!}, \tag{15}$$

$$2\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2}, \tag{16}$$

$$7\zeta(3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(n+1)(2n+1)!} \left(H_{2n+1} - \frac{1}{2} H_n \right), \tag{17}$$

$$6\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2}, \tag{18}$$

$$45\zeta(4) = \frac{\pi^4}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+2}(n!)^2}{(n+1)(2n+1)!} \left[\left(H_{2n+1} - \frac{1}{2} H_n \right)^2 + \left(H_{2n+1}^{(2)} - \frac{1}{4} H_n^{(2)} \right) \right], \tag{19}$$

$$24\zeta(5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^3}{n^2} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(2)}}{n^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^2}, \tag{20}$$

avec $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ et $H_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^k}$.

La formule (16) est la célèbre identité d'Euler déjà mentionnée dans l'introduction. On trouvera plusieurs démonstrations alternatives de cette identité dans [2], une variante de la formule (18) ainsi qu'un grand nombre de références sur les sommes d'Euler et leurs généralisations.

Remerciements

L'auteur remercie Bernard Candelpergher pour l'aide précieuse qu'il lui a apportée au cours de la relecture de ce travail.

References

[1] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, Special Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
[2] J. Borwein, D. Bradley, Thirty-two variations on a theme of Goldbach, Int. J. Number Theory 2 (2006) 65–103.
[3] H. Hasse, Ein Summierungsverfahren für die Riemannsche ζ-Reihe, Mathematische Zeitschrift 32 (1930) 458–464.
[4] C. Hermite, Lettre à S. Pincherle du 10 août 1900. Oeuvres complètes tome IV, Gauthiers-Villars, Paris, 1917 pp. 536–540.
[5] W. Johnson, The Curious History of Faà di Bruno's Formula, The American Mathematical Monthly, Mars 2002.
[6] C. Jordan, Calculus of Finite Differencies, Chelsea, New York, 1965.
[7] J. Riordan, Combinatorial Identities, Wiley, New York, 1968.
[8] R. Schimming, W. Strampp, Differential polynomial expressions related to the Kadomtsev-Petviashvili and Korteweg-de Vries hierarchies, J. Math. Phys. 40 (1999) 2429–2444.
[9] V.S. Varadarajan, Euler and his work on infinite series, Bull. Am. Math. Soc. 44 (2007) 515–539.