L1 économie-gestion – Mathématiques 2 – 2007-08

Un corrigé de l'interrogation des 8 et 9 avril 2008

Exercice 1 - sujet A. *On considère le sous-ensemble de* $\mathbb{R}^2$: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $1 \leq y \leq 3\}$ *et la fonction* $f : D \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y) = \frac{1}{(y-x)^2}$.

a. Montrer que f *est bien définie sur* D *et est continue.*

b. Posons $I = \iint_D f(x, y)dxdy$. *Que peut-on dire du signe de* I *? Calculer* I.

a. $f(x, y)$ est bien défini si $x \neq y$.

Pour $(x, y) \in D$ on a $x \leq \frac{1}{2} < 1 \leq y$ donc $x < y$ donc $f(x, y)$ est bien défini.

f s'écrit $g \circ h$ où g est l'application $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et h est la restriction à D de l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y - x$. Les applications g et h sont continues (g est l'inverse d'un polynôme ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^*$, $h(x, y)$ est un polynôme en x et y) donc f est continue.

b. On a pour tout (x, y) dans D $f(x, y) > 0$. I est l'intégrale sur D d'une fonction positive donc est positif. Puisque D est d'intérieur non vide et $f > 0$ sur D, I est strictement positif.

Grace au théorème de Fubini on peut écrire

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (\int_1^3 \frac{1}{(y-x)^2} dy) dx \ .$$

Posons pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$ $I(x) = \int_1^3 \frac{1}{(y-x)^2} dy$. L'application $y \mapsto -\frac{1}{y-x}$ est une primitive de $y \mapsto \frac{1}{(y-x)^2}$ sur l'intervalle $[1, 3]$ donc

$$I(x) = \left[y \mapsto -\frac{1}{y-x} \right]_1^3 = -\frac{1}{3-x} + \frac{1}{1-x}.$$

Maintenant $I = \int_0^{\frac{1}{2}} I(x)dx$.

L'application $x \mapsto -\ln(3 - x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{3-x}$ et $x \mapsto -\ln(1 - x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ donc

$$I = [\ln(3 - x) - \ln(1 - x)]_0^{\frac{1}{2}} = \ln(\frac{5}{2}) - \ln(3) - \ln(\frac{1}{2}) = \ln(5) - \ln(3)$$

(qui est bien positif).

Exercice 2 - sujet A. *Soit* f *la fonction définie par* $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \ln(x) + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

a. Quel est le domaine de définition de f *?* f *est-elle continue sur son domaine de définition ?*

b. Calculer $\int_1^8 f(x)dx$.

c. Expliquer pourquoi l'intégrale $\int_0^8 f(x)dx$ *est impropre. Est-elle convergente ?*

a. L'application $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ est définie sur $\mathbb{R}$; ln est défini sur $]0, +\infty[$ de même que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$. Donc f est définie sur $]0, +\infty[$.

f est continue sur son domaine de définition car elle s'écrit comme somme et produit de fonctions usuelles qu'on sait continues sur leur domaine de définition.

b. On calcule d'abord

$$\int_1^8 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4 \left[\sqrt{x}\right]_1^8 = 4\sqrt{8} - 4 = 8\sqrt{2} - 4 \ .$$

ensuite, par une intégration par parties en prenant une primitive de $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ et en dérivant ln :

$$\begin{aligned}
\int_1^8 x^{\frac{1}{3}} \ln(x)dx &= \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln(x)\right]_1^8 - \int_1^8 \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\frac{1}{x}dx \\
&= \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln(x)\right]_1^8 - \int_1^8 \frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}dx \\
&= \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln(x)\right]_1^8 - \left[\frac{9}{16}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8 \\
&= \frac{3}{4}8^{\frac{4}{3}}\ln(8) - 0 - \frac{9}{16}8^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{16} \\
&= 36\ln(2) - \frac{135}{16}
\end{aligned}$$

Enfin $\int_1^8 f = \int_1^8 \frac{2}{\sqrt{x}}dx + \int_1^8 x^{\frac{1}{3}}\ln(x)dx$ par linéarité. En rassemblant les morceaux on obtient

$$\int_1^8 f = 8\sqrt{2} - 4 + 36\ln(2) - \frac{135}{8} = 8\sqrt{2} + 36\ln(2) - \frac{199}{16}\ .$$

c. L'application $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}\ln(x)$ admet une limite finie quand x tend vers 0^+ mais pas $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}}$ donc l'intégrale $\int_0^8 f$ est impropre en 0.

On a $\int_\alpha^8 \frac{2}{\sqrt{x}}dx = 4(\sqrt{8} - \sqrt{\alpha})$ tend vers $4\sqrt{8}$ quand α tend vers 0^+.

$\int_\alpha^8 x^{\frac{1}{3}}\ln(x)dx = 12\ln(8) - \frac{3}{4}\alpha^{\frac{4}{3}}\ln(\alpha) - \frac{9}{16}8^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{16}\alpha^{\frac{4}{3}}$ tend vers $12\ln(8) - 9$ quand α tend vers 0^+.

On en déduit que $\int_\alpha^8 f$ admet une limite quand α tend vers 0^+ donc $\int_0^8 f$ est convergente et vaut

$$4\sqrt{8} + 12\ln(8) - 9 = 8\sqrt{2} + 36\ln 2 - 9\ .$$

Exercice 3 - sujet A. *Quelle est le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{2-x}}$? Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^2 f(x)dx$. (Penser à un changement de variable.)*

$f(x)$ est bien défini si $2 - x > 0$ donc le domaine de définition est $]-\infty, 2[$. L'application f est continue sur l'intervalle $[0, 2[$ mais n'admet pas de limite finie en 2 donc l'intégrale $\int_0^2 f$ est impropre en 2.

On calcule, pour $0 \leq \alpha < 2$, $\int_0^\alpha f$ en faisant le changement de variable $t = 2 - x$: $dx = -dt$, x variant de 0 à α quand t varie de 2 à $2 - \alpha$, d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha f &= \int_2^{2-\alpha} -\frac{(3-t)^2}{\sqrt{t}}dt \\
&= \int_2^{2-\alpha} \left(-\frac{9}{\sqrt{t}} + \frac{6t}{\sqrt{t}} - \frac{t^2}{\sqrt{t}}\right)dt \\
&= \int_2^{2-\alpha} \left(-\frac{9}{\sqrt{t}} + 6\sqrt{t} - t^{\frac{3}{2}}\right)dt \\
&= \left[-18\sqrt{t} + 4t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_2^{2-\alpha}\ .
\end{aligned}$$

$2 - \alpha$ tend vers 0^+ quand α tend vers 2^- donc $\left[-18\sqrt{t} + 4t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_2^{2-\alpha}$ tend vers $18\sqrt{2} - 4 \cdot 2^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} \cdot 2^{\frac{5}{2}}$ quand α tend vers 2^-. En particulier l'intégrale impropre $\int_0^2 f$ est convergente.

On peut simplifier l'expression obtenue pour la limite :

$$18\sqrt{2} - 4 \cdot 2^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = (18 - 8 + \frac{8}{5})\sqrt{2} = \frac{58}{5}\sqrt{2}\ .$$

François-Xavier Dehon, Université de Nice Sophia-Antipolis, Laboratoire J.A. Dieudonné
dehon@unice.fr