L1 éco-gestion 2008-09

Corrigé des ex 3, 4 et 5 de la feuille 3

Ex 3 $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 6x + 8$
$g : [1,5] \to \mathbb{R}$ $g(x) = |f(x)|$

a) Graphes de f et g

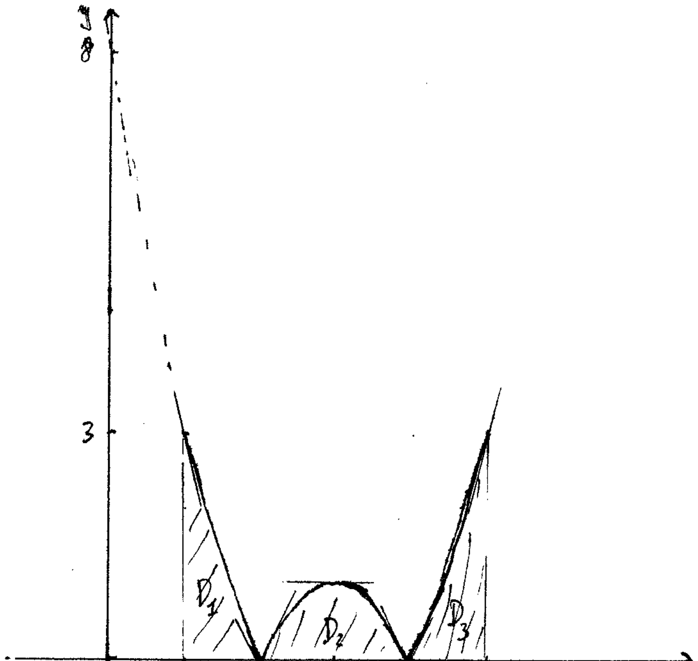
le graphe de f est un morceau d'une parabole tournée vers le haut (le coefficient de x^2 est >0)

On cherche le sommet de la parabole $(x_0, f(x_0))$ où x_0 est tel que $f'(x_0) = 0$ donc $2x_0 - 6 = 0$, $x_0 = 3$, $f(x_0) = -1$
la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie de la parabole.
les autres points remarquables de la parabole sont : - l'intersection avec l'axe des x : on cherche les x tels que $f(x) = 0$
racines d'un polynôme de degré 2 : $\Delta = 36 - 32 = 4$ $\rightsquigarrow$ $\frac{6 \pm 2}{2}$; $x_0 = 2$, $x_1 = 4$

- l'intersection avec l'axe des y : $(0, f(0)) = (0, 8)$ mais $x = 0$ est hors du domaine d'étude $[1,5]$

Valeurs aux bornes de l'intervalle d'étude : $f(1) = 3$, $f(5) = 3$

tangentes aux bornes ——— : $f'(1) = -4$ = pente de la tangente en 1 ; $f'(5) = 4$



tangente en les racines : $f'(2) = -2$ = pente de la tangente en 2
$f'(4) = 2$ ——— 4

Pour dessiner le graphe de g, on a besoin du signe de f : $g(x) = f(x)$ si $f(x) \geq 0$, $-f(x)$ sinon

$f(x)$ est du signe du coef. de x^2, c'est à dire positif, à l'extérieur des racines, c'est à dire sur $[1,2] \cup [4,5]$

$f(x)$ est du signe opposé au précédent, c'est à dire négatif, entre les racines c'est à dire sur $[2,4]$

Donc $g(x) = f(x) = x^2 - 6x + 8$ sur $[1,2] \cup [4,5]$
$= -f(x) = -x^2 + 6x - 8$ sur $[2,4]$

le graphe de g coïncide avec celui de f sur $[1,2] \cup [4,5]$; il est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe $(0x)$ sur $[2,4]$. En particulier on a un sommet en $(3,1)$, la pente de la tangente à droite en $x=2$ est 2, celle à gauche en 4 est -2

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq g(x)\}$. On note D_1 la partie de D correspondant aux x dans $[1,2]$ $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$
D_2 $[2,4]$
D_3 $[4,5]$

On a $\text{aire}(D) = \int_1^5 g(x)\,dx$ puisque g est positive et que D est délimité par l'axe des abscisses et le graphe de g

$= \text{aire}(D_1) + \text{aire}(D_2) + \text{aire}(D_3) = \int_1^2 g(x)\,dx + \int_2^4 g(x)\,dx + \int_4^5 g(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^4 -f(x)\,dx + \int_4^5 f(x)\,dx = \int_1^2 f - \int_2^4 f + \int_4^5 f$

$x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{6}{2}x^2 + 8x$ est une primitive de f donc $\int_a^b f = \left[x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x\right]_a^b = \frac{1}{3}b^3 - 3b^2 + 8b - \frac{1}{3}a^3 + 3a^2 - 8a$

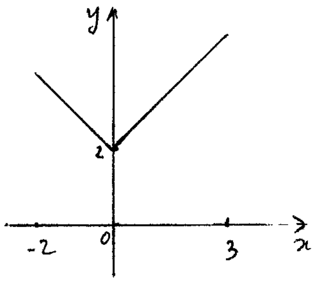
$\int_1^2 f = \frac{1}{3}\times 7 - 3\times 3 + 8 = \frac{4}{3}$; $\int_2^4 f = \frac{1}{3}(64-8) - 3(16-4) + 8(4-2) = -\frac{4}{3}$; $\int_4^5 f = \frac{1}{3}(125-64) - 3(25-16) + 8 = \frac{4}{3}$

On obtient aire $(D) = 4$

Ex 4 $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x| + 2$

$|x| = x$ si $x \geq 0$, $= -x$ si $x \leq 0$; donc $f(x) = -x+2$ sur $[-2,0]$, $= x+2$ sur $[0,3]$; donc le graphe de f est un segment de droite de pente -1 au dessus de $[-2,0]$, ——— 1 ——— $[0,3]$

Les deux segments se joignent en $(0,f(0)) = (0,2)$



On sait que $x \mapsto \frac{1}{2}x|x|$ est une primitive de $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$

Donc $x \mapsto \frac{1}{2}x|x| + 2x$ est une primitive de $x \mapsto |x| + 2$ sur $\mathbb{R}$. Les autres primitives diffèrent de celle-ci d'une constante

Soit F la primitive de f qui vaut 1 en $x = 2$. On a $F(x) = \frac{1}{2}x|x| + 2x + C$ pour un $C \in \mathbb{R}$ et $F(2) = 1 = \frac{1}{2}4 + 4 + C$ donc $C = -5$ et $F(x) = \frac{1}{2}x|x| + 2x - 5$

Ex 5 • $f_1(x) = x\sqrt{x} + e^{3x}$ est définie sur $[0,+\infty[$

$x \mapsto \frac{2}{5}x^{5/2} = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ est une primitive de $x \mapsto x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$ (sur $[0,+\infty[$) puisque $\frac{d}{dx}x^{5/2} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

$x \mapsto \frac{1}{3}e^{3x}$ est une primitive de e^{3x} puisque $\frac{d}{dx}e^{3x} = 3e^{3x}$

Donc $x \mapsto \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{3}e^{3x}$ est une primitive de f sur $[0,+\infty[$

• $f_2(x) = x^2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^5}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$. On connait une primitive de $x \mapsto x^2$: $x \mapsto \frac{1}{3}x^3$

$x \mapsto \frac{1}{x}$: $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$ et $x \mapsto \ln(-x)$ sur $]-\infty,0[$

$x \mapsto \frac{1}{x^5} = x^{-5}$: $x \mapsto -\frac{1}{4}x^{-4}$

Donc $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 2\ln(x) + \frac{1}{4}\frac{1}{x^4}$ est une primitive de f_2 sur $]0,+\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 2\ln(-x) + \frac{1}{4}\frac{1}{x^4}$ est une primitive de f sur $]-\infty,0[$. On peut écrire $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 2\ln(|x|) + \frac{1}{4}x^{-4}$ est une primitive de f_2 sur $\mathbb{R} - \{0\}$

• $f_3(x) = 8^x + 5\sin x = e^{x\ln(8)} + 5\sin x$ définie sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto \frac{1}{\ln(8)}e^{x\ln(8)} - 5\cos x = \frac{1}{3\ln(2)}8^x - 5\cos x$ en est une primitive.

• $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 3\cos x$ est définie sur $\mathbb{R}$ ($x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ toujours défini)

$x \mapsto \frac{3}{5}x^{5/3} - 3\sin x$ en est une primitive.