L1 eco-gestion 2008-09 — Indications pour la feuille de TD 4

Rappel : intégration par parties : Si u, v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a,b]$ et si u' et v' sont continues sur $[a,b]$ alors $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$

Changement de variables : Si u est une fonction continument dérivable sur un intervalle $[a,b]$ et si f est une fonction continue sur l'intervalle $u([a,b])$ alors $\int_a^b f(u(t)) \times u'(t)\, dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\, dx$.

En pratique on cherche à calculer $\int_c^d f(x)dx$ en posant $x = u(t)$, $dx = u'(t)\,dt$ pour u une fonction continument dérivable, pourvu qu'on trouve α et β tq $u(\alpha) = c$ et $u(\beta) = d$ et pourvu que la fonction $t \mapsto u'(t) \times f(u(t))$ soit continue sur $[\alpha, \beta]$.

On peut aussi dans certains cas reconnaître la forme $f(u(t))\, u'(t)\, dt$.

Ex 1 $\int_1^{27} \sqrt[3]{x}\, \ln(x)\, dx = \int_1^{27} x^{1/3} \ln(x)\, dx$: int. par parties avec $v(x) = \ln(x)$, $u'(x) = x^{1/3}$ (on reconnaît $x \mapsto x^{1/3}$ comme la dérivée de ...)

$\int_0^{\pi} \theta (\cos\theta + 1)\, d\theta$: poser $v(\theta) = \theta$, $u'(\theta) = \cos\theta + 1$ (on sait trouver $u(\theta)$ ...)

$\int_0^1 (6t+100) e^{-3t}\, dt$: poser $v(t) = 6t+100$, $u'(t) = e^{-3t}$

Ex 2 $I_1 = \int_1^9 \frac{3x}{\sqrt{2x+7}}\, dx$: chgt de variable en posant $t = 2x+7 \rightsquigarrow x = \frac{t-7}{2} = u(t), dx = \frac{1}{2}dt$. I_1 devient l'intégrale de $2 \times 1 + 7$ à $2 \times 9 + 7$ d'une somme de puissances de t et on connaît une primitive de $t \mapsto t^{\alpha}$

$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{3x+1}\, dx$: poser $t = 3x+1 \leftrightarrow x = \frac{t-1}{3}$, $dx = \frac{1}{3}dt$

$I_3 = \int_0^2 \frac{1+x}{4+x^2}\, dx = \int_0^2 \frac{1}{4} \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}\, dx + \int_0^2 \frac{1}{4} \frac{x}{1+(\frac{x}{2})^2}\, dx$. Pour la première intégrale poser $u = \frac{x}{2}$, $dx = 2du$

On connaît une primitive de $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$. Pour la seconde intégrale poser $u(x) = (\frac{x}{2})^2$ on reconnaît $\int_0^2 \frac{1}{4} \frac{u'(x)}{1+u(x)}\, dx$ et on connaît une primitive de $u \mapsto \frac{1}{1+u}$

Ex 3 $I_1 = \int_0^1 \arctan(x)\, dx$: essayer une intégration par parties en posant $v(x) = \arctan(x) \rightsquigarrow v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$u'(x) = 1 \rightsquigarrow u(x) = ?$

$I_2 = \int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^3}\, dx$: essayer un chgt de variable en posant $t = x-1 \leftrightarrow x = t+1$, $dx = dt$ on reconnaît l'intégrale d'une somme de puissances de t (en développant)

Ex 5 $I_n = \int_1^e x^n \ln(x)\, dx$, $J_n = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^n}\, dx$. Essayer une intégration par parties en posant $v(x) = \ln(x)$, $u'(x) = x^n$ ou x^{-n}

Observer également que le changement de variable $x = \frac{1}{t}$, $dx = \frac{-1}{t^2}dt$ donne un lien entre I_n et J_{n+2}.