L1 - eco-gestion 2008-09

Corrigé de l'exercice 5 de la feuille 1

$f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^{1/12}$ bien définie ($(1+x)^{1/12}$ est défini si et seulement si $1+x \geqslant 0$)

a) $f'(x) = \frac{1}{12}(1+x)^{\frac{1}{12}-1} = \frac{1}{12}(1+x)^{-\frac{11}{12}}$

$f''(x) = \frac{-11}{144}(1+x)^{\frac{1}{12}-2} = \frac{-11}{144}(1+x)^{-\frac{23}{12}}$

b) f admet en $x_0 = 0$ l'approximation affine $x \mapsto f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{1}{12}x$. L'équation de la tangente au graphe de f en $(0, f(0))$ est donc $y = 1 + \frac{1}{12}x$

c) L'approximation affine de f évaluée en $\frac{5}{100}$ donne $1 + \frac{1}{12} \times \frac{5}{100} = 1 + \frac{1}{240}$

on a $\frac{1}{250} = \frac{4}{1000} = 0{,}004 < \frac{1}{240} < \frac{1}{200} = \frac{5}{1000} = 0{,}005$ donc $\frac{1}{240} = 0{,}004\ldots$; $1 + \frac{1}{240} = 1{,}004\ldots$

d) On a $f(\frac{5}{100}) = \underbrace{f(0) + f'(0) \times \frac{5}{100}}_{1+\frac{1}{240}} + \frac{f''(\theta)}{2} \times (\frac{5}{100})^2$ pour un $\theta \in]0, \frac{5}{100}[$ d'après la formule de Mac-Laurin

D'après a) $f''(\theta) = -\frac{11}{144}(1+\theta)^{-\frac{23}{12}}$ du signe de $-\frac{11}{144}$ donc négatif.

Donc $f(\frac{5}{100}) < 1 + \frac{1}{240}$. L'approximation donnée en c) est par excès.

e) $-\frac{23}{12} < 0$ donc l'application $y \mapsto y^{-\frac{23}{12}}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

Pour $x \geqslant 0$, $1+x \geqslant 1$ donc $(1+x)^{-\frac{23}{12}} \leqslant 1^{-\frac{23}{12}} = 1$ (et on sait $(1+x)^{-\frac{23}{12}} > 0$)

On obtient $|f''(x)| = |\frac{-11}{144}| \times |(1+x)^{-\frac{23}{12}}| \leqslant \frac{11}{144} \times 1$

La valeur absolue de l'erreur commise par l'approximation affine est $|\frac{f''(\theta)}{2}(\frac{5}{100})^2| \leqslant \frac{11}{288} \times \frac{25}{100^2}$

Pour une majoration ~~on écrit~~ par un nombre décimal on peut écrire $\frac{11}{288} \times \frac{25}{100^2} \leqslant \frac{11}{250} \times \frac{25}{100^2} = 0{,}0011$

Corrigé de l'interrogation du 11 - 16 mars

1 A $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} + \sqrt{2-x^2}$

$\frac{1}{\ln(1+x)}$ est défini si $\ln(1+x)$ est défini et est différent de 0 donc si $1+x > 0$ et $1+x \neq 1$ d'après ce qu'on sait sur la fonction $\ln$

$\sqrt{2-x^2}$ est défini ssi $2-x^2 \geq 0$. On a $2-x^2 = (\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)$ donc $2-x^2 \geq 0 \iff \sqrt{2}-x$ a même signe que $\sqrt{2}+x$

$\iff \sqrt{2}-x \leq 0$ et $\sqrt{2}+x \leq 0$

ou

$\sqrt{2}-x \geq 0$ et $\sqrt{2}+x \geq 0$

$\iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

On obtient $f(x)$ est défini ssi $x > -1$ et $x \neq 0$ <u>et</u> $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

donc ssi $x \in]-1,0[\cup]0,\sqrt{2}]$

$x \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ est dérivable sur son domaine de définition comme composée de fonctions dérivables

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{2-x^2}$ est dérivable là où $2-x^2 > 0$ donc sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$

On obtient f est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,\sqrt{2}[$ (strictement inclus dans D_f)

1B $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x}} + \ln(1-x^2)$ défini ssi $2+x \geq 0$, $2+x \neq 0$ et $1-x^2 > 0$

donc si $x > -2$ et $-1 < x < 1$ donc si $x \in]-1,1[$

f est dérivable sur $]-1,1[$ comme somme de composées de fonctions dérivables

2A a) $1+x$ tend vers 2 quand x tend vers 1 donc n'est pas de la forme $1 \times \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$

$1+x-x^2-x^3$ tend vers 0 quand x tend vers 1 donc est de la forme $1 \times \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ $(\varepsilon(x) = 1+x-x^2-x^3)$

b) $f(x) = 2+x-2x^2+x^3$. On a $f(1) = 2$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = -4+6x\big|_{x=1} = 2$

la formule de Taylor-Young donne $f(x) = 2 + 2\dfrac{(x-1)^2}{2} + \underset{x\to 1}{o}((x-1)^2) = 2 + (x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$

c) $(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x) = (x-1)\underbrace{[(x-1)+(x-1)\varepsilon(x)]}_{\text{tend vers 0 quand } x \text{ tend vers } 1}$ donc $f(x) = 2 + \underset{x\to 1}{o}(x-1)$

$C = 2$ convient

$(f(x)-2)^2 = ((x-1)\varepsilon_1(x))^2 = (x-1)^2\varepsilon_1^2(x) = \underset{x\to 1}{o}((x-1)^2)$

2B a) $2-x \underset{x\to 2}{\longrightarrow} 0$ donc $2-x = 2 \times \dfrac{2-x}{2} = 2 \times \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 2}{\longrightarrow} 0$

$2-x-x^2+x^3 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$ donc $2-x-x^2+x^3$ n'est pas de la forme $2 \times \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

b) $f(x) = 3-x+2x^2-x^3 = 3 - 2\dfrac{(x-1)^2}{2} + \underset{x\to 1}{o}((x-1)^2)$ d'après la formule de Taylor-Young

$C = 3$: $3-x+2x^2-x^3-3 = (x-1)\underbrace{[-(x-1)+(x-1)\varepsilon(x)]}_{\underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0} = \underset{x\to 1}{o}(x-1)$

On a alors $(f(x)-C)^3 = ((x-1)\varepsilon_1(x))^3 = (x-1)^3\varepsilon_1(x)^3 = \underset{x\to 1}{o}((x-1)^3)$