L1 - éco-gestion 2008-09

Corrigé de l'interrogation du 16 mars

Cf rédaction des questions 1A et 2A

1C $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1-2x)}+\sqrt{1-x^2}$ défini si $\ln(1-2x)$ est défini, est $\neq 0$ et si $\sqrt{1-x^2}$ est défini

donc si $1-2x>0$, $1-2x\neq 1$ et $1-x^2\geq 0$

donc si $x<\frac{1}{2}$, $x\neq 0$ et $-1\leq x\leq 1$

$D_f=[-1,0[\cup]0,\frac{1}{2}[$

$x\mapsto\sqrt{x}$ n'est dérivable que sur $]0,+\infty[$ donc f n'est dérivable que sur $]-1,0[\cup]0,\frac{1}{2}[$

1D $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\ln(x^2-1)$ défini si $\sqrt{x+2}$ est défini, est $\neq 0$ et si $\ln(x^2-1)$ est défini

donc si $x+2>0$ et $x^2-1>0$

donc si $x>-2$, ($x<-1$ ou $x>1$)

$D_f=]-2,-1[\cup]1,+\infty[$

f est dérivable sur $]-2,-1[\cup]1,+\infty[$ comme somme de composées de fonctions dérivables.

2C a) $1+x\neq o_{x\to 0}(1)$ car $\dfrac{1+x}{1}\xrightarrow[x\to 0]{}1\neq 0$

$2+x-2x^2-x^3=o_{x\to 1}(1)$ car $\dfrac{2+x-2x^2-x^3}{1}\xrightarrow[x\to 1]{}0$ (limite d'un quotient)

b) $f(x)=2+x-2x^2+x^3$. On a $f(1)=2$, $f'(1)=0$, $f''(1)=2$ donc d'après la formule de Taylor-Young $f(x)=2+(x-1)^2+o_{x\to 1}((x-1)^2)$

c) On a $f(x)-2=(x-1)^2+o((x-1)^2)=(x-1)[\underbrace{(x-1)+o(x-1)}_{\xrightarrow[x\to 1]{}0}]$ donc $f(x)-2=o_{x\to 1}(x-1)$ $C=2$

2D a) $2-x\neq o_{x\to 0}(2)$ car $\dfrac{2-x}{2}\xrightarrow[x\to 0]{}2\neq 0$

$1+x-x^2-x^3=o_{x\to 1}(2)$ car $\dfrac{1+x-x^2-x^3}{2}\xrightarrow[x\to 1]{}0$ (limite d'un quotient)

b) $f(x)=3+3x-3x^2+x^3$. On a $f(1)=4$, $f'(1)=0$, $f''(1)=0$ donc $f(x)=4+o_{x\to 1}((x-1)^2)$ d'après la formule de Taylor-Young

c) On a $f(x)-4=o_{x\to 1}((x-1)^2)=(x-1)[\underbrace{(x-1)\varepsilon(x)}_{\xrightarrow[x\to 1]{}0}]$ donc $f(x)-4=o_{x\to 1}((x-1))$ $C=4$

Corrigé de la feuille TD n°3

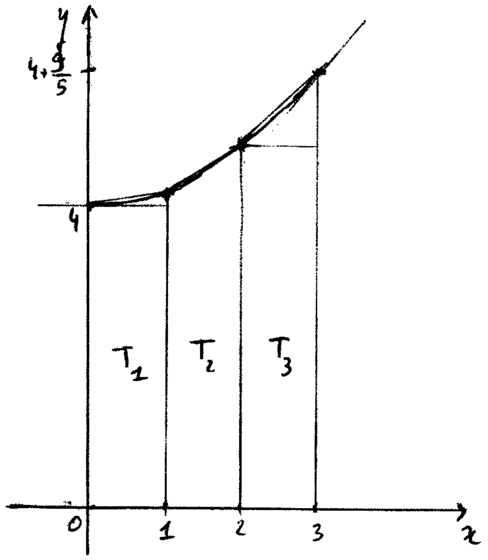
Ex 1 $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{5}x^2+4$ polynôme de degré 2

a) le graphe de f est le morceau au dessus de $[0,3]$ ~~de la~~ d'une parabole tournée vers le haut, de sommet le point $(0,4)$

(En effet $f(x)\geq 4$ avec égalité ssi $x=0$)

f est convexe ($f''(x)=\frac{2}{5}>0$) ; sa tangente en 0 est de pente $f'(0)=0$; sa tangente en 3 est de pente $f'(3)=\frac{6}{5}$

On peut prendre quelques points supplémentaires : $f(0)=4$, $f(1)=4+\frac{1}{5}$, $f(2)=4+\frac{4}{5}$, $f(3)=4+\frac{9}{5}$



b) Chaque trapèze T_i est la réunion d'un rectangle de côté 1 de longueur $f(x_{i-1})$ et d'un triangle-rectangle dont les côtés en angle droit sont de longueur 1 et $f(x_i)-f(x_{i-1})$.

L'aire du trapèze T est donc $1\times f(x_{i-1}) + \frac{1}{2}\times 1\times\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)$

On obtient aire $(T_1) = 4+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$

aire $(T_2) = \left(4+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\right) = 4+\frac{5}{10}$

aire $(T_3) = \left(4+\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{5}-\frac{4}{5}\right) = 4+\frac{13}{10}$

La somme des aires des trapèzes vaut $12+\frac{19}{10} = 13+\frac{9}{10} = 13,9$

Comme f est convexe ($f''(x)>0$ pour tout $x\in[0,3]$) le segment joignant $(x_{i-1},f(x_{i-1}))$ à $(x_i,f(x_i))$ est au dessus du graphe de f donc l'aire du trapèze T_i est supérieure à l'aire du domaine $D_i=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x_{i-1}\leq x\leq x_i \text{ et } 0\leq y\leq f(x)\}$ donc aire (D) = aire (D_1) + aire (D_2) + aire (D_3) $\leq$ aire (T_1) + aire (T_2) + aire (T_3) $= 13,9$. L'approximation est par excès.

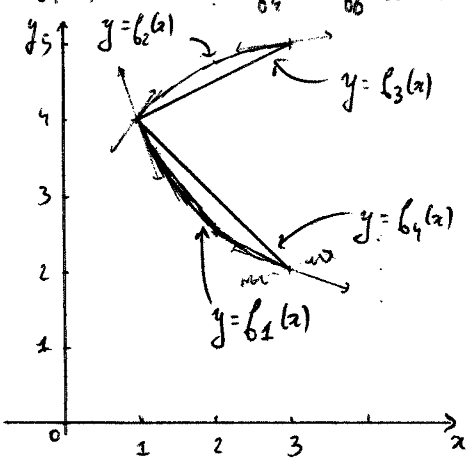
Ex2 $f_1(x) = 1+\frac{3}{x}$, $f_2(x) = \frac{11x-3}{2x} = \frac{11}{2}-\frac{3}{2x}$ qu'on étudie sur $[1,3]$

a) $f_1'(x) = \frac{-3}{x^2}$, $f_1''(x) = \frac{6}{x^3}$ de même signe que x donc $f_1''(x)>0$ pour tout $x\in[1,3]$ donc f_1 est convexe sur $[1,3]$

$f_2'(x) = \frac{3}{2x^2}$, $f_2''(x) = -\frac{3}{x^3}$ donc $f_2''(x)<0$ pour tout $x\in[1,3]$ donc f_2 est concave sur $[1,3]$

b) $f_3(x) = \frac{x+7}{2} = \frac{7}{2}+\frac{x}{2}$ polynôme de degré 1 : f_3 est affine ; son graphe au dessus de $[1,3]$ est un segment de droite, précisément le segment joignant le point $(1,f_3(1)) = (1,4)$ au point $(3,f_3(3)) = (3,5)$.

$f_4(x) = -x+5$. f_4 est affine. Son graphe au dessus de $[1,3]$ est le segment joignant $(1,4)$ à $(3,2)$.



On trace les graphes de f_1 et f_2 en calculant $f_1(1) = 4 = f_2(1)$

$f_1(2) = \frac{5}{2}$, $f_1(3) = 2$, $f_1'(1) = -3$ = pente de la tangente en $x=1$

$f_1'(3) = -\frac{1}{3}$ = ——— $x=3$

$f_2(2) = \frac{19}{4}$, $f_2(3) = 5$, $f_2'(1) = \frac{3}{2}$, $f_2'(3) = \frac{1}{6}$ (ce qui signifie que lorsqu'on recule ~~en abscisse~~ un pt de la tangente de 12 mm en abscisse, son ordonnée a reculé de 2 mm.) On dessine les graphes en tenant compte des points calculés, des tangentes aux extrémités, de la convexité ou concavité.

Le graphe de f_4 est le segment joignant $(1,f_1(1))$ à $(3,f_1(3))$. Comme f_1 est convexe, le graphe de f_4 est au dessus du graphe de f_1 donc pour tout $x\in[1,3]$ $f_1(x)\leq f_4(x)$. De même pour tout $x\in[1,3]$ $f_3(x)\leq f_2(x)$ car f_2 est concave et le graphe de f_3 est le segment joignant $(1,f_2(1))$ à $(3,f_2(3))$.

On calcule $f_3(x)-f_4(x) = \frac{3}{2}x-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}(x-1) \geq 0$ si $x\in[1,3]$

Conclusion : pour tout $x\in[1,3]$ $f_1(x)\leq f_4(x)\leq f_3(x)\leq f_2(x)$. Par positivité de l'intégrale on en déduit $\int_1^3 f_1\leq\int_1^3 f_4\leq\int_1^3 f_3\leq\int_1^3 f_2$