L1 économie-gestion - Mathématiques 2 | Partiel du 3 avril 2009
Durée 90mn - Calculatrices et documents interdits | Sujet A

Nom : | **No carte étudiant :**

Prénom :

Les réponses doivent être convenablement justifiées. La notation tiendra compte de la rédaction. Barème indicatif

(3pt) **Exercice 1.** Quel est le signe de $x-1$ et $\frac{1}{x+1}$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$? En déduire le tableau de signes de $\frac{x-1}{x+1}$.

Quel est le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(\frac{x-1}{x+1})$?

Donner la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(\frac{x-1}{x+1})$.

On a $x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$

$\frac{1}{x+1} \geqslant 0 \iff x+1 \geqslant 0$ et $x+1 \neq 0 \iff x > -1$

D'où le tableau de signes

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{1}{x+1}$		$-$	||	$+$	|	$+$	
$\frac{x-1}{x+1}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ est défini ssi $\frac{x-1}{x+1}$ est défini et est >0 donc si $x \neq -1$ et $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ d'après le tableau de signes

donc le domaine de définition de $x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ est $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) \times \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x^2-1}$ pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ d'après la formule donnant la dérivée d'une composée.

(4pt) **Exercice 2.** Donner, sans le détail des calculs, le développement limité en $x_0 = 0$ à l'ordre 3 des fonctions $f_1(x) = \ln(1+x)$, $f_2(x) = \sin(x)$

En déduire, cette fois avec explications, un développement limité en $x_0 = 0$ à l'ordre **4** de $f_3(x) = \ln(1+x^2)$.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to0}{o}(x^3)$ (formule de Taylor)

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{o}(x^3)$

On a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ qd $x \to 0$ donc $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + (x^2)^2\varepsilon(x^2)$

$= x^2 - \frac{x^4}{2} + x^4\varepsilon(x^2)$

Or $x^2 \to 0$ quand $x \to 0$ donc $\varepsilon(x^2) \to 0$ quand $x \to 0$ (~~compos~~ limite d'une composée de fonctions) donc $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$

C'est le développement limité en $x_0 = 0$ à l'ordre 4 de $x \mapsto \ln(1+x^2)$

(4pt) **Exercice 3.** Donner le domaine de définition puis un développement limité en $x_0 = 1$ à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = \ln(1+x)$.

Donner l'équation de la tangente au graphe de f en $x_0 = 1$ puis déterminer la position du graphe de f par rapport à sa tangente au voisinage de $x_0 = 1$.

Faites un dessin représentant le graphe de f et sa tangente en $x_0 = 1$ au voisinage de $x_0 = 1$.

$\ln(1+x)$ est défini ssi $x > -1$. ~~tel f~~ Puisque $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est infiniment dérivable sur $]-1,+\infty[$

la formule de Taylor-Young donne $f(x) = f(1) + f'(1)\times(x-1) + f''(1)\times\frac{(x-1)^2}{2} + o_{x\to 1}((x-1)^2)$

$$= \ln(2) + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}\frac{(x-1)^2}{2} + o_{x\to 1}((x-1)^2)$$

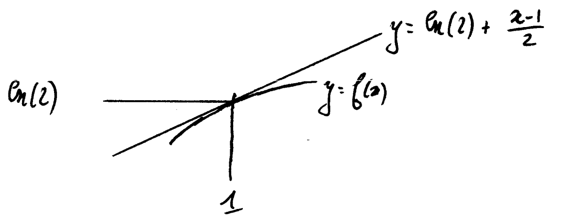
L'équation de la tangent en $x_0 = 1$ est $y = \ln(2) + \frac{1}{2}(x-1)$ (équation du graphe de l'approximation affine donnée par le DL en $x_0 = 1$ à l'ordre 1)

On a $f(x) - \ln(2) - \frac{x-1}{2} = -\frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2) = (x-1)^2\left(-\frac{1}{8} + o(1)\right)$

$(x-1)^2$ est >0 si $x \neq 1$, nul si $x = 1$

$-\frac{1}{8} + o(1)$ est du signe de $-\frac{1}{8}$ donc <0 au voisinage de 1

donc $f(x) - \ln(2) - \frac{x-1}{2}$ est <0 pour x proche de 1, $x \neq 1$ et est nul pour $x = 1$. Le graphe de f est donc sous la tangente en 1 au voisinage de $x = 1$ et touche la tangente en $x = 1$



La pente de la tangente en $x_0 = 1$ est $\frac{1}{2}$

Le graphe de f, au voisinage de $x_0 = 1$, est proche d'une parabole tournée vers le bas passant par le point $(1, \ln(2))$ et s'appuyant sur la droite d'équation $y = \ln(2) + \frac{x-1}{2}$

(4pt) **Exercice 4.** Calculer la limite quand x tend vers 0 de $\frac{x^3}{x-\sin(x)}$.

Quand $x \to 0$, $x^3 \to 0$ et $x - \sin(x) \to 0$. On a donc une forme indéterminée.

On utilise un DL de $x \mapsto x - \sin(x)$ en $x_0 = 0$ au premier ordre tel qu'on ait un polynôme non nul :

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}(x^3)$ donc $x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}(x^3) = x^3\left(\frac{1}{6} + o_{x\to 0}(1)\right)$

($o_{x\to 0}(1)$ désigne une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers 0)

On obtient $\frac{x^3}{x - \sin(x)} = \frac{x^3}{x^3} \times \frac{1}{\frac{1}{6} + o_{x\to 0}(1)} = \frac{1}{\frac{1}{6} + o_{x\to 0}(1)}$ pour $x \neq 0$

Quand x tend vers 0, $\frac{1}{6} + o_{x\to 0}(1)$ tend vers $\frac{1}{6}$ donc $\frac{1}{\frac{1}{6} + o_{x\to 0}(1)}$ tend vers $\frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

Donc $\frac{x^3}{x - \sin(x)}$ tend vers 6 quand x tend vers 0, $x \neq 0$

(6pt) **Exercice 5.** Soit f la fonction $[-3,-\frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2 + x - 2$.

a. Etudier le signe de $x^2 + x - 2$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

b. Dessiner dans un repère orthonormé du plan le graphe de f puis de $g : [-3,-\frac{1}{2}] \to \mathbb{R}, x \mapsto |f(x)|$.

c. Calculer $\int_{-3}^{-2} g(x)\mathrm{d}x$ et $\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} g(x)\mathrm{d}x$. En déduire l'aire du domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } -3 \leq x \leq -\frac{1}{2} \text{ et } 0 \leq y \leq g(x)\}\,.$$

a) On cherche les racines de x^2+x-2 : $\Delta = 1+8 = 3^2$, $x_0 = \frac{-1-3}{2} = -2$, $x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$

x^2+x-2 est du signe de 1 donc >0 à l'extérieur des racines donc sur $]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$

x^2+x-2 est du signe opposé sur $]-2,1[$

(On aurait pu aussi bien écrire $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$ et faire un tableau de signes)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $g : [-3,-\frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ donné par $g(x) = |x^2+x-2|$

$g(x) = x^2+x-2$ si ~~xxx~~ $x^2+x-2 \geq 0$
$\quad = -x^2-x+2$ si $x^2+x-2 \leq 0$

donc d'après le tableau de signe, $g(x) = x^2+x-2$ sur $[-3,-2]$
$\quad = -x^2-x+2$ sur $[-2,-\frac{1}{2}]$

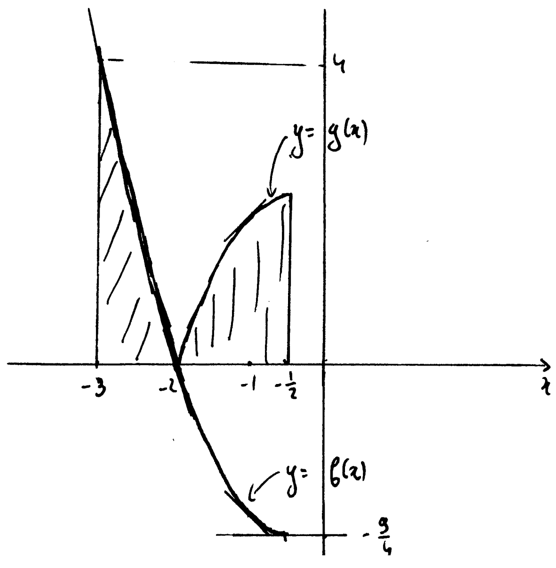
le graphe de f est le morceau au dessus de $[-3,-\frac{1}{2}]$ d'une parabole de sommet $(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4})$ $(f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2})$ tournée vers le haut. On calcule $f(-3) = 4$, $f'(-3) = -5$ = pente de la tangente en -3

$f(-2) = 0$, $f'(-2) = -3$

$f(-1) = -2$, $f'(-1) = -1$

$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}$, $f'(-\frac{1}{2}) = 0$

le graphe de g coïncide avec celui de f sur $[-3,-2]$ et est le symétrique par rapport à l'axe (Ox) du graphe de f sur $[-2,-\frac{1}{2}]$



c) On a $\int_{-3}^{-2} g(x)dx = \int_{-3}^{-2} (x^2+x-2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-3}^{-2}$

$= -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 - \frac{-27}{3} - \frac{9}{2} - 6$

$= \frac{11}{6}$

$\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} g(x)\,dx = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (-x^2-x+2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{24} - \frac{1}{8} - 1 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = -\frac{17}{4} + 5$

$= \frac{9}{4}$

l'aire du domaine D est $\int_{-3}^{-\frac{1}{2}} g = \int_{-3}^{-2} g + \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} g$ (relation de Chasles)

$= \frac{11}{6} + \frac{9}{4} = \frac{49}{12}$