L1 économie-gestion - Mathématiques 2 — Partiel du 3 avril 2009

Durée 90mn - Calculatrices et documents interdits — Sujet B

Nom : **No carte étudiant :**

Prénom :

Les réponses doivent être convenablement justifiées. La notation tiendra compte de la rédaction. Barème indicatif

(3pt) **Exercice 1.** Quel est le signe de $2-x$ et $\frac{1}{2+x}$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$? En déduire le tableau de signes de $\frac{2-x}{2+x}$.

Quel est le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$?

Donner la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$.

$2-x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 2$

$\frac{1}{2+x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 2+x > 0 \Leftrightarrow x > -2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$2-x$	$+$	|	$+$	0	$-$
$\frac{1}{2+x}$	$-$	|	$+$	|	$+$
$\frac{2-x}{2+x}$	$-$	|	$+$	0	$-$

$\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ défini $\Leftrightarrow$ $\frac{2-x}{2+x}$ est défini et $\geqslant 0$ $\Leftrightarrow$ $x \neq -2$ et $x \in]-2,2]$ $\Leftrightarrow$ $x \in]-2,2]$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)\right) \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}} = \frac{-(2+x)-(2-x)}{(2+x)^2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{-2}{(2+x)^{3/2}\,(2-x)^{1/2}} = \frac{-2}{(2+x)\sqrt{4-x^2}}$$

pour $x \in]-2,2[$

(4pt) **Exercice 2.** Donner, sans le détail des calculs, le développement limité en $x_0 = 0$ à l'ordre 3 des fonctions $f_1(x) = \sqrt{1+x}$, $f_2(x) = \cos(x)$

En déduire, cette fois avec explications, un développement limité en $x_0 = 0$ à l'ordre **4** de $f_3(x) = \sqrt{1+x^2}$.

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o_{x\to 0}(x^3)$ (Formule de Taylor)

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^3)$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ qd $x \to 0$

donc $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + x^4\varepsilon(x^2)$. Or $x^2 \to 0$ qd $x \to 0$ donc $\varepsilon(x^2) \longrightarrow 0$ qd $x \to 0$ (limite d'une composée)

donc $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o_{x\to 0}(x^4)$

(4pt) **Exercice 3.** Donner le domaine de définition puis un développement limité en $x_0 = 1$ à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Donner l'équation de la tangente au graphe de f en $x_0 = 1$ puis déterminer la position du graphe de f par rapport à sa tangente au voisinage de $x_0 = 1$.

Faites un dessin représentant le graphe de f et sa tangente en $x_0 = 1$ au voisinage de $x_0 = 1$.

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{8\, 2^{3/2}}(x-1)^2 + o_{x\to 1}\left((x-1)^2\right)$$ par la formule de Taylor

$$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-1)^2 + o_{x\to 1}\left((x-1)^2\right)$$

$\rightsquigarrow$ eq de la tangente $y = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-1)$

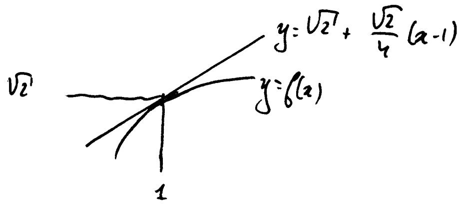
$$f(x) - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}(x-1) = -\frac{\sqrt{2}}{32}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right) = (x-1)^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{32} + o_{x\to 1}(1)\right)$$

$(x-1)^2$ est >0 si $x \neq 1$, 0 si $x = 1$; $-\frac{\sqrt{2}}{32} + o_{x\to 1}(1)$ est du signe de $-\frac{\sqrt{2}}{32}$ donc <0 au voisinage de $x = 1$

donc $f(x) - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}(x-1)$ est <0 pour x proche de 1, $x \neq 1$
0 pour $x = 1$

donc le graphe de f est sous la tangente en $x = 1$ au voisinage de 1

la tangente est de pente $\frac{\sqrt{2}}{4} \simeq 0,35$. le graphe de f au voisinage de $x = 1$ est proche d'une parabole tournée vers le bas, passant par le point $(1, \sqrt{2})$ et s'appuyant sur la droite d'équation $y = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-1)$



(4pt) **Exercice 4.** Calculer la limite quand x tend vers 0 de $\frac{x^2}{1-\cos(x)}$.

$1-\cos(x) \to 0$ qd $x \to 0$ donc on a une forme indéterminée

On utilise le DL de $\cos(x)$ en 0 . $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)$ donc $1-\cos(x) = \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)$

$= x^2\left(\frac{1}{2} + o_{x\to 0}(1)\right)$

donc $\frac{x^2}{1-\cos(x)} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}+o(1)} = \frac{1}{\frac{1}{2}+o(1)}$ pour $x \neq 0$

Quand $x \to 0$, $\frac{1}{2} + o(1) \to \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{\frac{1}{2}+o(1)} \longrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Donc $\frac{x^2}{1-\cos(x)}$ tend vers 2 quand x tend vers 0, $x \neq 0$

(6pt) **Exercice 5.** Soit f la fonction $[\frac{1}{2}, 3] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2 - x - 2$.

a. Etudier le signe de $x^2 - x - 2$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

b. Dessiner dans un repère orthonormé du plan le graphe de f puis de $g : [\frac{1}{2}, 3] \to \mathbb{R}, x \mapsto |f(x)|$.

c. Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{2} g(x)\mathrm{d}x$ et $\int_{2}^{3} g(x)\mathrm{d}x$. En déduire l'aire du domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \frac{1}{2} \leq x \leq 3 \text{ et } 0 \leq y \leq g(x)\}\ .$$

a)

Racine de x^2-x-2 : $\Delta = 1+8 = 3^2 \rightsquigarrow x_0 = \frac{1-3}{2} = -1$, $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$

x^2-x-2 est ~~[illegible]~~ du signe de 1 donc >0 sur $]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$

du signe opposé sur $]-1,2[$

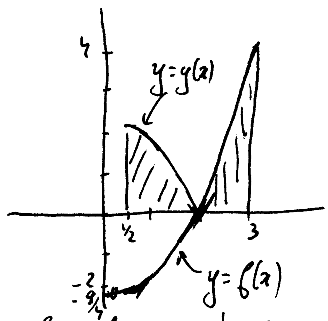
(On peut aussi écrire $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$ et faire un tableau de signes)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $g(x) = |x^2-x-2| = x^2-x-2$ sur $[2,3]$ d'après le tableau de signe

$= -x^2+x+2$ sur $[\frac{1}{2},2]$

le graphe de f est le morceau au dessus de $[\frac{1}{2},3]$ d'une parabole tournée vers le haut de sommet $(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$ ($f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$)



$f(\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}$, $f'(\frac{1}{2}) = 0$ (= pente de la tangente en ~~à~~ $x = \frac{1}{2}$)

$f(1) = -2$, $f'(1) = 1$

$f(2) = 0$, $f'(2) = \cancel{3}\,2$

$f(3) = 4$, $f'(3) = 3$

le graphe de g coïncide avec celui de f sur $[2,3]$, est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe (Ox) sur $[\frac{1}{2},2]$

c) On a $\int_{\frac{1}{2}}^{2} g = \int_{\frac{1}{2}}^{2} (-x^2+x+2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{8}{3} + 2 + 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{8} - 1 = \frac{9}{4}$

$\int_{2}^{3} g = \int_{2}^{3} (x^2-x-2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{2}^{3} = \frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 6 - \frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 = \frac{11}{6}$

l'aire du domaine D est $\int_{\frac{1}{2}}^{3} g = \int_{\frac{1}{2}}^{2} g + \int_{2}^{3} g$ par la relation de Chasles

$= \frac{9}{4} + \frac{11}{6} = \frac{49}{12}$