L2 MASS - Probabilités **Examen – sujet A** **15 décembre 2015**

Durée : 2h. Documents et appareils électroniques interdits

Détailler raisonnablement les calculs et justifier chaque réponse

1. On dispose d'un dé (à 6 faces) déséquilibré. On observe les probabilités suivantes d'apparition des cinq premières faces :

1	2	3	4	5
1/6	1/4	1/12	1/4	1/12

a. Avec quelle probabilité apparaît la face 6 ?

b. On lance le dé ; quelle est l'espérance du résultat ?

2. On lance 10 fois une pièce équilibrée et on note Y le nombre de fois que Pile apparaît.

a. Que vaut $\mathrm{P}(Y = 1)$?

b. Que valent l'espérance et la variance de Y ? (On peut ici ne pas détailler les calculs.)

3. a. On lance 5 dés équilibrés et on note N la somme des valeurs obtenues. Calculer l'espérance de N, la variance de N et l'espérance de N^2.

b. L'expérience consiste maintenant à lancer 5 dés puis à lancer une pièce de monnaie équilibrée un nombre de fois égal à la somme des valeurs affichées par les dés. A l'issue de l'expérience on note Y le nombre de fois qu'on a obtenu Pile.

Calculer l'espérance et la variance de Y.

4. Un tiroir contient 20 paires de chaussettes différentes (donc 40 chaussettes allant par paire) ; les chaussettes sont mélangées entre elles. On sort 20 chaussettes au hasard du tiroir et on note X le nombre de paires au complet parmi les 20 chaussettes sorties.

a. Si $X = 0$, combien de paires complètes reste t-il dans le tiroir ? Et si $X = 3$?

b. Proposer un modèle (Ω, P) pour l'expérience. A quelle partie de Ω correspond l'évènement $X = 0$? Quelle est sa probabilité ?

c. Quelle est la loi de X ? Quelle expression obtient on pour l'espérance et la variance de X ?

d. On numérote les paires de chaussettes de 1 à 20. On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la paire i est au complet parmi les 20 chaussettes tirées, qui vaut 0 sinon.

Calculer l'espérance de X_i. En déduire l'espérance de X.

Calculer l'espérance de $X_i X_j$ pour $i \neq j$. En déduire l'espérance de X^2 puis la variance de X.

Les X_i sont elles indépendantes entre elles ? (Justifier par un calcul.)

5. a. Soit Y une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $t \geq 0$ on a $\mathrm{P}(Y \leq t) = 1 - \exp(-t)$. Calculer l'espérance de Y.

b. On tire un nombre réel X dans l'intervalle $[0, 1]$ suivant la loi uniforme et on pose $Y = -2\ln(1-X)$.

Quel est l'intervalle des valeurs possibles pour Y ?

Soit t un réel positif. A quel ensemble de valeurs de X correspond l'évènement $Y \leq t$?

En déduire la fonction de répartition de Y puis sa densité. Quelle loi reconnaît on ?