Q1 cf exam dec 16 Q2

1 Q21 $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ avec proba uniforme

1 "impair"$_\Omega = \{1, 3, 5\}$

1 $\{1\}$ est égal à la représentation d'un ev^t de proba $\neq$

1 Q2 X prend un nbre fini de valeurs $\Leftrightarrow$ F est constante par morceaux avec un nbre fini de morceaux

1 X admet une densité $\Leftrightarrow$ F est continue, dérivable par sauf peut être en des pts isolés

Ex3 cf exam ex6

1 $P(\text{le petit frère gagne}) = P(\text{dé} \leq 4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

1+1 $N \sim \mathcal{B}(n, 2/3)$ d'espérance $\frac{2n}{3} \in [0, n]$ ok

+1 (bonus) $\frac{N}{n} \xrightarrow[\text{proba}]{} \frac{2}{3}$ d'après la loi des grands nombre donc

(histogramme) la partie visible de la distribution est concentrée autour de 2/3

G_i à valeurs ds $\{1, 2, 3, 4, -5, -6\}$ avec proba uniforme

$E(G_i) = \frac{1}{6}(1+2+3+4-5-6) = -\frac{1}{6}$ $\quad V(G_i) = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) - \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{1}{36} = \frac{545}{36} = 15 + 1/6 - 1/36$

1 $E(\Pi_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(G_i) = -\frac{1}{6}$

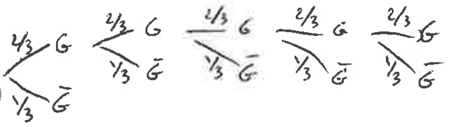
1 $V(\Pi_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(G_i)$ car les répétitions sont indépendantes

$= \frac{V(G_1)}{n}$

0,5 $P_1 = P(G_1 \geq 0) = 2/3$. $P_2 = P(G_1 + G_2 \geq 0) = \overbrace{P(G_1, G_2 \geq 0)}^{(2/3)^2} + 2\,\overbrace{P(G_1 \geq 0, G_2 < 0, G_1 + G_2 > 0)}^{0}$

1,5 $P_n = P(\Pi_n \geq 0) = P\left(\Pi_n \geq E(G_1) + \frac{1}{6}\right) \leq P\left(\Pi_n \notin \left]E(G_1) - \frac{1}{6}, E(G_1) + \frac{1}{6}\right[\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ d'après la loi des grands nbres

Ex4 a



1 (arbre ou Ω)

1 proba

G = "le petit frère gagne"

Ω = {chemins de l'arbre} (5 chemins)

$P(\omega)$ = produits des étiquettes de ω pour $\omega \in \Omega$

b $x := P(G)$

1 + 2 $N_p = Y_1 + \dots + Y_5 \rightsquigarrow E(N_p) = E(Y_1) + \dots + E(Y_5) = \cancel{1 + \tfrac{2}{3} + (\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{2}{3})^3 + (\tfrac{2}{3})^4 + (\tfrac{2}{3})^5 = \frac{1 - (2/3)^5}{1 - 2/3} = 3 - 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^5}$

R_q loi de $N_p \rightsquigarrow E(N_p)$

$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1 - x^5}{1 - x}$

$= 1,1111$ si $x = \frac{1}{10}$

$Y_i Y_j = 1$ si les parties i et j sont gagnées, 0 sinon

$= Y_j$ si $i \leq j$

1,5 donc ici $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = E(Y_i Y_j) - E(Y_i)E(Y_j) \underset{\text{si } i \leq j}{=} E(Y_j)(1 - E(Y_i)) = x^{j-1}(1 - x^{i-1}) \neq 0$ si $x \in]0, 1[$

1 $\rightsquigarrow$ les Y_i ne sont pas indépendantes entre elles

$Var(N_p) = E(N_p^2) - E(N_p)^2$

$N_p^2 = (Y_1 + \dots + Y_5)^2 = \sum_{i=1}^{5} Y_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le 5} Y_i Y_j \leadsto E(N_p^2) = \sum_{i=1}^{5} E(Y_i^2) + 2\sum_{i<j} E(Y_i Y_j)$

$E(N_p)^2 = \left(E(Y_1) + \dots + E(Y_5)\right)^2 = \sum_{i=1}^{5} E(Y_i)^2 + 2\sum_{i<j} E(Y_i)E(Y_j)$

$\leadsto E(N_p^2) - E(N_p)^2 = \sum_{i=1}^{5} Var(Y_i) + 2\sum_{i<j} Cov(Y_i, Y_j) = \sum_{i=1}^{5} x^{i-1}(1-x^{i-1}) + 2\sum_{i<j} x^{j-1}(1-x^{i-1}) = \dots$

N_p ne prenant que 5 valeurs, le calcul élémentaire via la loi de N_p est plus simple.

c $E(N_i) = \underbrace{E(N_i \mid Y_i = 1)}_{x} \underbrace{P(Y_i=1)}_{x^{i-1}} + \underbrace{E(N_i \mid Y_i = 0)}_{0} P(Y_i=0) = x^i$

1+1

Rq loi de $N_i \leadsto E(N_i)$ $N_i = 1 \Leftrightarrow Y_{i+1} = 1$

1 $N = N_1 + \dots + N_5 \leadsto E(N) = E(N_1) + \dots + E(N_5) = \sum_{i=1}^{5} x^i = x \frac{1-x^5}{1-x}$

1 N n'est pas une fonction de N_p : si $N_p = 5$ alors N peut valoir 4 ou 5

– $E(N) = x\, E(N_p)$

Ex5 a) $f(x) = 3e^{-3x}$ si $x > 0$ $\leadsto P(X>0) = \int_0^{+\infty} 3e^{-3x}dx = \left[-e^{-3x}\right]_0^{+\infty} = 1$

1 $\leadsto P(X \le 0) = 1 - P(X>0) = 0$

1 mais alors pour tout $t \le 0$, $P(X \le t) \le P(X \le 0) = 0$ donc $F_X(t) = 0$ si $t \le 0$ donc ~~F_X est continue~~ $f(t) = F_X'(t) = 0$ si $t<0$

1+1 calcul $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 3x e^{-3x}dx = \underbrace{\left[-xe^{-3x}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx}_{\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^{+\infty}} = \frac{1}{3}$

b) $Z = Max(X, Y)$

1 $P(Z \le t) = P(X \le t \text{ et } Y \le t) \underset{\text{indépendance}}{=} P(X \le t)P(Y \le t) = P(X \le t)^2 = 0$ si $t \le 0$

$= \left(\left[-e^{-3x}\right]_0^t\right)^2 = (1-e^{-3t})^2$ si $t>0$

~~Donc~~ $t \mapsto P(Z \le t)$ est continue sur $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$ d'après son expression

et en 0 car $\lim_{\substack{t \to 0 \\ t<0}} P(Z \le t) = 0 = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} P(Z \le t)$

1 donc Z admet la densité $t \mapsto \frac{d}{dt} P(Z \le t) = 2 \times 3e^{-3t}(1-e^{-3t})$ si $t>0$

$= 0$ si $t<0$

1 $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \left(6te^{-3t} - 6te^{-6t}\right)dt = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$