L2 MASS . Corrigé de l'interrogation du 26 oct. 2017

Q1 $$P(E) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \text{ réalise } E}} P(\omega)$$

1

1 Si E n'est pas représentable dans Ω, on n'a plus l'égalité mais l'inégalité stricte $P(E) > \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \text{ réalise } E}} P(\omega)$

Ex 2 On cherche $$P(\underbrace{\text{pile au 2e lancé}}_{\text{noté pile-2}} \mid \underbrace{\text{pile au 1e lancé}}_{\text{noté pile-1}}) = \frac{P(\text{pile-2 et pile-1})}{P(\text{pile-1})}$$

On a $$P(\text{pile-2 et pile-1}) = \underbrace{P(\text{pile-2 et pile-1} \mid \text{biaisée})}_{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}} \underbrace{P(\text{biaisée})}_{3/10} + \underbrace{P(\text{pile-2 et pile-1} \mid \text{non biaisée})}_{1/2 \times 1/2} \underbrace{P(\text{non biaisée})}_{7/10}$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{4}{3} + \frac{7}{4}\right) = \frac{1}{10} \times \frac{37}{12} = \frac{1}{10}\left(3 + \frac{1}{12}\right) \simeq 0,3$$

1 - formalisation $$P(\text{pile-1}) = P(\text{pile-1} \mid \text{biaisée})\, P(\text{biaisée}) + P(\text{pile-1} \mid \text{non biaisée})\, P(\text{non biaisée})$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{10}$$

$$= \frac{1}{10}\left(2 + \frac{7}{2}\right) = \frac{11}{2 \times 10} = 0,55$$

1 La probabilité cherchée est $$\frac{37}{10\times 12} \Big/ \frac{11}{10\times 2} = \frac{2\times 37}{12 \times 11} = \frac{37}{66} = \frac{33}{66} + \frac{4}{66} = 0,5 + \underbrace{\frac{2}{33}}_{\simeq 0,06}$$

1 - déf Les evts pile-1 et pile-2 sont indépendants (strictement) si $P(\text{pile-2} \mid \text{pile-1}) = P(\text{pile-2})$

1 - calcul On a $P(\text{pile-2}) = P(\text{pile-1}) = \frac{11}{20}$

$$P(\text{pile-2} \mid \text{pile-1}) = \frac{37}{66} = \frac{36,3}{66} + \frac{0,7}{66} = \frac{11}{20} + \frac{0,7}{66} \neq \frac{11}{20}$$ donc les evts ne sont pas indépendants

Cependant $P(\text{pile-2} \mid \text{pile-1}) \simeq P(\text{pile-2})$ les evts sont presque indépendants.

Ex 3 • Ω = ensemble des combinaisons de 5 chapeaux parmi 10 avec équiprobabilité

$\omega \in \Omega$ réalise E si ~~[illegible]~~ ω contient l'un des 2 chapeaux jaunes, et un seul, ne le réalise pas sinon

1 - modèle donc E est représentable ds Ω et $E_\Omega = \{$ combinaison de 5 chapeaux parmi 10 contenant exactement 1 chapeau jaune $\}$

1 - calcul $$P(E) = \frac{\# E_\Omega}{\# \Omega} = \frac{2 \times \binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{2 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 / 4 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 / 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{2 \times 5 \times 5}{10 \times 9} = \frac{5}{9}$$

Ex 4 On note Ma = "être malade", Med = "prendre le médicament"

On a $b_{Med} = 5\%$, $b_{Ma \mid Med} = 80\%$, $b_{\overline{Med} \mid Ma} = 30\%$ on veut comparer b_{Ma} à b_{Med}

On a $b_{Ma} = b_{Ma \mid Med}\, b_{Med} + b_{Ma \mid \overline{Med}}\, b_{\overline{Med}}$ et $b_{Ma \mid \overline{Med}}\, b_{\overline{Med}} = b_{\overline{Med} \mid Ma}\, b_{Ma}$ $(= b_{Ma \text{ et } \overline{Med}})$

donc $b_{Ma}\left(1 - b_{\overline{Med} \mid Ma}\right) = b_{Ma \mid Med}\, b_{Med}$

$$b_{Ma} = \frac{b_{Ma \mid Med}}{1 - b_{\overline{Med} \mid Ma}}\, b_{Med} = \underbrace{\frac{0,8}{1 - 0,3}}_{>1}\, b_{Med} > b_{Med}$$

1 - formalisation
1 - calcul

Autre méthode :
$$\underbrace{b_{Ma \mid Med}}_{0,8}\, b_{Med} = \underbrace{b_{Med \mid Ma}}_{1 - b_{\overline{Med} \mid Ma} = 0,7}\, b_{Ma}$$ d'où $b_{Ma} = \frac{0,8}{0,7}\, b_{Med}$

Ex 3 Autre modèle : On tire les cinq chapeaux successivement. A chaque étape on retient l'issue 'J' : le chapeau tiré est jaune et sa négation '$\bar{J}$'. On a l'arbre suivant dont les chemins sont les él^{ts} du modèle Ω'

Dans ce modèle l'év^t E est représenté par l'ensemble des chemins $(x_1, \dots, x_5)$ avec $x_i = J$ ou $\bar{J}$, $x_i = J$ pour un et un seul i, c'est à dire

$$\{(J,\bar{J},\bar{J},\bar{J},\bar{J}), (\bar{J},J,\bar{J},\bar{J},\bar{J}), (\bar{J},\bar{J},J,\bar{J},\bar{J}), (\bar{J},\bar{J},\bar{J},J,\bar{J}), (\bar{J},\bar{J},\bar{J},\bar{J},J)\}$$

de probabilité la somme des probabilités des chemins, c'est à dire

$$\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{6} + \frac{8}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{6} + \frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}$$

$$+ \frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6} + \frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}$$

$$= 5 \times \frac{2\times 8\times 7\times 6\times 5}{10\times 9\times 8\times 7\times 6} = \frac{5}{9}$$