Sujet B

Q1 Un modèle est un ensemble d'issues (tel qu'à l'issue de l'expérience une et une seule issue du
2 modèle est réalisée) muni d'une mesure de probabilité

2 Un modèle (Ω, P) est combinatoire si Ω est fini et tous les éléments de Ω sont équiprobables

Ex2 On donne $P_{Ned} = 10\%$, $P_{Na|Ned} = 75\%$, $P_{\overline{Ned}|Na} = 20\%$
1,5

1 On cherche * $P_{Ned|Na} = 1 - P_{\overline{Ned}|Na} = 80\%$

1,5 * P_{Na} : on a $P_{Ned|Na} \times P_{Na} = P_{Na|Ned} \times P_{Ned}$ $(= P_{Ned \text{ et } Na})$

(1 pour expression 0,5 pour calcul)

d'où $P_{Na} = \dfrac{P_{Na|Ned} \times P_{Ned}}{P_{Ned|Na}} = \dfrac{75/100 \times 10/100}{80/100} = \dfrac{75}{8 \times 100} = \dfrac{72+3}{8 \times 100} = \dfrac{1}{100}(9 + 0{,}375)$

$= 9{,}375\ \%$

Autre méthode : ~~par~~ on a $P_{Na} = P_{Na|Ned} \times P_{Ned} + P_{Na|\overline{Ned}} \times P_{\overline{Ned}}$

$= P_{Na|Ned} \times P_{Ned} + \dfrac{P_{\overline{Ned}|Na} \times P_{Na}}{\cancel{P_{\overline{Ned}}}} \times \cancel{P_{\overline{Ned}}}$

d'où $P_{Na}(1 - P_{\overline{Ned}|Na}) = P_{Na|Ned} \times P_{Ned}$

$P_{Na} \times 0{,}8 = 0{,}75 \times 0{,}1$

1,5 * $P_{Na|\overline{Ned}} = \dfrac{P_{\overline{Ned}|Na} \times P_{Na}}{P_{\overline{Ned}}} = \dfrac{20/100 \times 75/800}{1 - 10/100} = \dfrac{150}{9 \times 8 \times 100} = \dfrac{25}{12 \times 100}$

1,5 * $P(Ned|Na) = \dfrac{P(Ned|Na)}{P(Ned)} \times P(Ned) = \dfrac{80/100}{10/100} \times P(Ned) = 8 \times P(Ned)$

La probabilité est multipliée par 8

Ex3 $\Omega_1 = \{1, -, 5\} \times \{g, d\}$ avec mesure de proba uniforme : on identifie un gant par la paire dont il fait parti et l'attribut gauche ou droit, chaque gant est équiprobable.

1,5 Ω = ens des parties à 4 éléments de Ω_1 avec équiprobabilité $\quad \#\Omega = \binom{\#\Omega_1}{4} = \binom{10}{4}$

1 $N = 1$ correspond à $\{\omega \in \Omega, N(\omega) = 1\} = \{A \subset \Omega_1,$ A est formé d'une paire au complet et de deux autres gants dépareillés $\}$

$= \{\{(i,g),(i,d),(j,a),(k,b)\}$ avec i, j, k trois élts distincts de Ω_1, $a, b \in \{g,d\}$ $\}$

2 Il y a cinq choix possibles pour i. Pour chaque choix de i il y a $4 \times 2 \times 3 \times 2$ choix possibles de (j,a) et (k,b) dans l'ordre mais l'ordre ne compte pas dans Ω donc ces $4 \times 2 \times 3 \times 2$ choix possibles correspondent à $\dfrac{4 \times 2 \times 3 \times 2}{2}$ éléments dans Ω

Donc $\#\text{"}N=1\text{"}_\Omega = 5 \times 4 \times 2 \times 3$ et puisque le modèle est combinatoire $P(N=1) = \dfrac{5 \times 4 \times 2 \times 3}{\binom{10}{4}} = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8 \times 7 / 4 \times 3 \times 2} = 4/7$

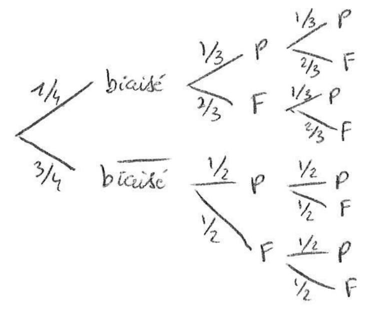
(Ex3) Autre calcul : 5 choix pour i. Pour chaque choix de i $\binom{4}{2}$ choix de $\{j,k\}$. Pour chaque choix de $\{j,k\}$, 4 choix pour $(j,a),(k,b)$

Rq autre méthode : $P(N=1) = 1 - P(N=0) - P(N=2)$

Avec pour modèle le choix de 4 élts de Ω_1 dans l'ordre on obtient $P(N=0) = \frac{10\times 8\times 6\times 4}{A_{10}^4} = \frac{10\times 8\times 6\times 4}{10\times 9\times 8\times 7}$

Avec pour modèle le choix de 4 élts de Ω_1 sans ordre (Ω plus haut) on obtient $P(N=2) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{5\times 4\times 3/2}{10\times 9\times 8\times 7/4\times 3\times 2}$

Ex4



2

E et F sont équiprobable par un argument de symétrie : on peut échanger le 1er lancé avec le 2ème lancé

Par le calcul : $P(E) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{11}{6}\right)$

$P(F) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right) = P(E)$

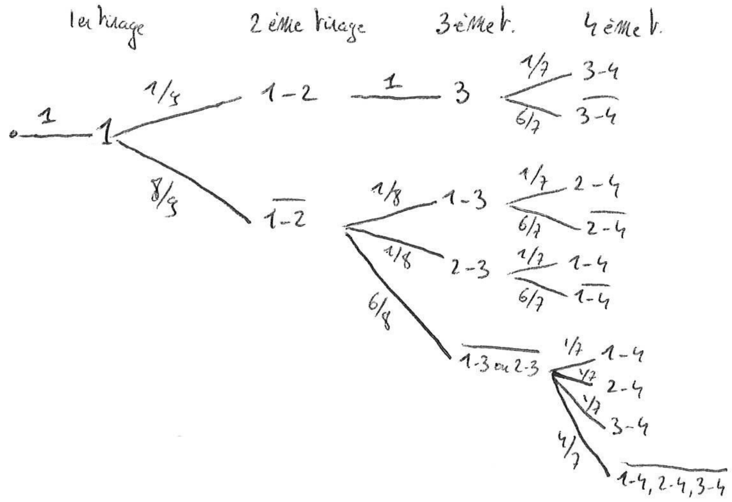
E et F sont indépendants si $P(E \text{ et } F) = P(E)P(F)$

2 Or $P(E \text{ et } F) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}+\frac{3}{4}\right) = \frac{31}{4\times 4\times 9}$

qu'on compare à $P(E)\times P(F) = \left(\frac{1}{4}\times\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{121}{16\times 36} = \frac{30}{16\times 9} + \frac{1}{16\times 36} < \frac{30}{16\times 9} + \frac{1}{16\times 9}$

donc E et F ne sont pas indépendants. (Ils le sont presque : $\frac{P(E \text{ et } F)}{P(E)P(F)} \simeq 1$; la connaissance de F ne dit pas grand chose sur E)

Retour sur l'ex3 : solution avec un arbre : on tire successivement les 4 gants. On note i-j l'événement "les gants tirés à la i ème étape et à la j ème étape forment une paire". On note 1 l'evt "on a tiré la 1ère chaussette" de proba 1 !
3 " — 3ème — "



Ω = ensemble des chemins dans l'arbre, $P(\omega)$ = produit des étiquettes

$N=1$ est réalisé par les chemins $(1, 1\text{-}2, 3, \overline{3\text{-}4})$,

$(1, \overline{1\text{-}2}, 1\text{-}3, \overline{2\text{-}4})$, $(1, \overline{1\text{-}2}, 2\text{-}3, \overline{1\text{-}4})$,

$(1, \overline{1\text{-}2}, \overline{1\text{-}3, 2\text{-}3}, 1\text{-}4)$

$(1, \overline{1\text{-}2}, \overline{1\text{-}3, 2\text{-}3}, 2\text{-}4)$

(———, 3-4)

$P(N=1) = 1\times\frac{1}{9}\times 1\times\frac{6}{7}$

$+ 1\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{6}{7} + 1\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{6}{7}$

$+ 1\times\frac{8}{9}\times\frac{6}{8}\times\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)$

$= \frac{1}{9}\times\frac{6}{7}\times(1+2+3) = \frac{4}{7}$.