L2 Mass - Proba   Corrigé de l'interrogation du 7 décembre 2017

Q Il faut et il suffit d'avoir $x_0,\dots,x_n \geq 0$ et $x_0+\dots+x_n = 1$

Ex 2 Notons N = nbre de parties jouée. N est une va à valeurs ds $\{1,\dots,10\}$. On cherche $E(N)$

Pour $1\leq k<10$ l'evt $N=k$ est l'evt $(k-1)$ succès suivis d'un échec. Comme les résultats sont indépendants entre eux, on a $P((k-1) \text{ succès suivis d'un échec}) = \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}\frac{9}{10}$ (cela vaut pour $k=1$ avec la convention $\left(\frac{1}{10}\right)^0=1$)

L'evt $N=10$ est l'evt "les 9 premières parties sont des succès" de proba $\left(\frac{1}{10}\right)^9$

$$E(N)=\sum_{k=1}^{10} k\,P(N=k) = \left(\sum_{k=1}^{9} k\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}\frac{9}{10}\right) + 10\left(\frac{1}{10}\right)^9$$

calcul élémentaire (développemt décimal de $E(N)$) :

$$\sum_{k=1}^{9} k\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} = 1+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\dots+\frac{9}{10^8} = 1{,}23\dots9$$

$$\frac{9}{10}\sum_{k=1}^{9} k\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} = \left(1-\frac{1}{10}\right)\times 1{,}23\dots9 = 1{,}23\dots9 - 0{,}123\dots9 = 1{,}\underbrace{1-1}_{8\text{ décimales}} - \frac{9}{10^9}$$

$$E(N) = 1{,}\underbrace{1-1}_{8\text{ dec.}} - \frac{9}{10^9} + \frac{10}{10^9} = 1{,}1-1+\frac{1}{10^9} = 1{,}\underbrace{1-1}_{9\text{ dec.}}$$

calcul formel :

$$\sum_{k=1}^{9} k\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} = f'\left(\frac{1}{10}\right) \text{ avec } f(x)=\sum_{k=0}^{9}x^k = \frac{1-x^{10}}{1-x} \rightsquigarrow f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{10x^9(1-x)+x^{10}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^{10}}{1-x}$$

$$E(N) = (1-x)f'(x) + 10x^9 \quad \text{avec } x=\frac{1}{10}$$

$$= \frac{1}{1-x} - 10x^9 - \frac{x^{10}}{1-x} + 10x^9 = \frac{1-x^{10}}{1-x} \quad \text{avec } x=\frac{1}{10}$$

On retrouve le développt décimal : $\frac{1-(1/10)^{10}}{1-1/10} = \sum_{k=0}^{9}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 1{,}\underbrace{1-1}_{9\text{ dec.}}$

G = gain lors d'une journée. On cherche $E(G)$

on conditionne à la suite des succès - échec qui est l'issue retenue de la journée : $\underbrace{S-S}_{k\text{ fois}},\bar S$ pour $k\leq 9$ et $\underbrace{S-S}_{10\text{ fois}}$

$$E(G) = \sum_{k=0}^{9}\underbrace{E(G\mid k\,S \text{ suivi de } \bar S)}_{k(10-1)-1}\ \underbrace{P(k\,S\text{ suivi de }\bar S)}_{\left(\frac{1}{10}\right)^k\frac{9}{10}} + \underbrace{E(G\mid 10\,S)}_{10(10-1)}\ \underbrace{P(10\,S)}_{(1/10)^{10}}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{9}\left(9\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}\right)k\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}\right) - \sum_{k=0}^{9}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^k + 9\left(\frac{1}{10}\right)^9$$

On reconnaît $\sum_{k=0}^{9}k\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}$ et $\sum_{k=0}^{9}\left(\frac{1}{10}\right)^k$

calcul ...

Autre méthode : $G = (10-1)(N-1)-1$ si l'issue n'est pas 10 succès
$= (10-1)N$ sinon

$$E(G) = E(G\mid 10\text{ succès})\,P(10\text{ succès}) + E(G\mid \overline{10\text{ succès}})\,P(\overline{10\text{ succès}})$$

$$= \underbrace{E(9N\mid 10s)}_{9E(N\mid 10s)}\,P(10s) + \underbrace{E(9N-10\mid \overline{10s})}_{9E(N\mid\overline{10s})-10}\,P(\overline{10s}) = 9\Big(\underbrace{E(N\mid 10s)\,P(10s) + E(N\mid\overline{10s})\,P(\overline{10s})}_{E(N)}\Big) - \underbrace{P(\overline{10s})}_{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{10}}\times 10$$

Autre méthode pour l'ex 2

On pose pour $i \in \{1, \dots, 10\}$ $Y_i = 1$ si la i ème partie est jouée seulement

$= 0$ sinon

$P(Y_i = 1) = P(i-1 \text{ succès initiaux}) = \left(\frac{1}{10}\right)^{i-1}$

Alors $N = \sum_{i=1}^{10} Y_i$, $E(N) = \sum_{i=1}^{10} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{10} P(Y_i) = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{10}\right)^{i-1} = 1,\underbrace{11 - 1}_{9 \text{ dec.}}$

On pose G_i = gain lors de la i ème partie si elle a lieu

$= 0$ sinon

$G = \sum_{i=1}^{10} G_i$, $E(G) = \sum_{i=1}^{10} E(G_i)$

$E(G_i) = \underbrace{E(G_i \mid Y_i = 1)}_{E(\text{Gain lors d'une partie})} P(Y_i = 1) + \underbrace{E(G_i \mid Y_i = 0)}_{0} P(Y_i = 0)$ d'où $E(G) = E(\text{Gain lors d'une partie}) \underbrace{\sum_{i=1}^{10} P(Y_i = 1)}_{E(N)}$

$E(\text{Gain lors d'une partie}) = (10-1)\frac{1}{10} + (-1)\frac{9}{10} = 0$ d'où $E(G) = 0$

Ex 3 X_i à valeurs ds $\{-1, 1\}$ $P(X_i = 1) = \frac{18}{37}$, $P(X_i = -1) = \frac{19}{37}$ $\rightsquigarrow$ $E(X_i) = \frac{18}{37} - \frac{19}{37} = -\frac{1}{37}$

$Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ $\rightsquigarrow$ $E(Y_n) = \frac{1}{n}\left(E(X_1) + \dots + E(X_n)\right) = \frac{n}{n} E(X_1) = -\frac{1}{37}$

$V(Y_n) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2}\left(V(X_1) + \dots + V(X_n)\right)$ car les X_i sont indépendantes

$= \frac{1}{n} V(X_1) = \frac{1}{n}\left(E(X_1^2) - E(X_1)^2\right)$

or X_1^2 est constante égale à 1 donc $E(X_1^2) = 1$ d'où $V(Y_n) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{37^2}\right)$

$g_n = P(Y_n \geq 0) \leq \underbrace{P\left(Y_n \notin \left[E(Y_1) - \frac{1}{37}, E(Y_1) + \frac{1}{37}\right]\right)}_{Y_n > 0 \text{ ou } Y_n < -\frac{2}{37}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'après la loi des grands nombres