L2 MASS - Probabilités **examen** **21 décembre 2017**

Durée : 2h. Documents et appareils électroniques interdits

Détailler raisonnablement les calculs et justifier chaque réponse. Les exercices 3 et 4 sont indépendants.

Q.1. Une expérience consiste à lancer un dé équilibré. On retient du lancer la face affichée (l'entier de 1 à 6).

Quel est le modèle naturel (Ω, P) pour cette expérience ?

A quoi correspond dans ce modèle l'évènement "l'entier affiché est impair" ?

Les évènements liés à cette expérience sont ils tous équiprobables ?

Q.2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F sa fonction de répartition.

Quelle propriété de F indique que X prend un nombre fini de valeurs ?

Quelle propriété de F indique que X admet une densité ?

Ex. 3. Une fille joue avec son petit frère au jeu suivant : elle lance un dé. Si le dé affiche un nombre inférieur ou égal à 4 elle donne ce nombre de bonbons à son frère. Sinon c'est son frère qui lui donne ce nombre de bonbons.

a. Quelle est la probabilité que le petit frère gagne des bonbons lors d'une partie ?

b. On note N le nombre de fois que le petit frère a gagné des bonbons après n parties ($n > 0$ est un entier fixé). Quelle est la loi de N ? Quelle est son espérance ? La valeur trouvée vous semble elle raisonnable ?

A quoi ressemble la distribution de la loi de $\frac{N}{n}$ quand n est grand (faites un dessin raisonnablement précis).

c. On note G_i le gain du petit frère en bonbons (positif ou négatif) lors de la i-ème partie et $M = (G_1 + \cdots + G_n)/n$ le gain moyen après n parties. Calculer l'espérance et la variance de M.

d. On note p_n la probabilité que le petit frère a gagné plus de bonbons qu'il n'en a perdu après n parties.

Que vaut p_1 ? Que vaut p_2 ?

Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$? Expliquer.

Ex. 4. On reprend l'exercice précédent. Le petit frère n'est pas bon joueur : il arrête de jouer dès qu'il a perdu. La grande soeur n'est pas très patiente : elle s'arrête de jouer après 5 parties.

a. Donner un modèle (Ω, P) d'une séance complète de jeu.

b. On note x la probabilité que le petit frère gagne une partie (on ne retient pas la valeur de x calculée dans l'exercice précédent). On note pour $1 \leq i \leq 5$ Y_i la variable qui vaut 1 si la i-ème partie est jouée lors d'une séance de jeu, 0 sinon. On note Np le nombre de parties jouées lors de la séance de jeu.

Quel lien y a t-il entre Np et les Y_i ? En déduire l'espérance de Np en fonction de x. Quel développement décimal obtiendrait on pour $\mathrm{E}(Np)$ si on avait $x = \frac{1}{10}$?

Calculer la covariance de Y_i avec Y_j. Les variables Y_i sont elles indépendantes entre elles ? En déduire la variance de Np.

c. On note N_i la variable qui vaut 1 si le petit frère gagne la i-ème partie (à supposer qu'elle ait lieu), qui vaut 0 sinon.

Calculer en fonction de x l'espérance de N_i en conditionnant suivant la valeur de Y_i. En déduire l'espérance du nombre N de fois que le petit frère gagne lors d'une séance de jeu.

La variable N est elle une fonction de Np ? L'espérance de N est elle une fonction de $\mathrm{E}(Np)$?

Ex. 5. Soit X une variable aléatoire continue dont on note f la densité. On sait que $f(x)$ vaut $3e^{-3x}$ si $x > 0$.

a. Quelle est la probabilité qu'on ait $X \leq 0$? Qu'en déduit on sur l'expression de $f(x)$ pour $x < 0$?

Calculer l'espérance de X.

b. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de même loi que X. On note Z la variable égale à la plus grande valeur entre X et Y (à l'issue de l'expérience).

Calculer la fonction de répartition de Z. La variable Z admet elle une densité ?

Que vaut l'espérance de Z ?