Licence L2 MASS - Probabilité **feuille 3** **2 novembre 2016**

Loi d'une variable aléatoire discrète

> Une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble E est la donnée pour chaque issue de l'expérience aléatoire d'une valeur de X dans E. Pour tout élément $e \in E$ on note "$X = e$" l'évènement "X prend la valeur e".
> La variable aléatoire X est représentable dans un modèle (Ω, P) de l'expérience si pour chaque issue $\omega \in \Omega$, la valeur de X est bien déterminée ; on la note alors $X(\omega)$ de sorte que X est représentée par une application $\Omega \to E$.
> La variable aléatoire X est discrète si l'ensemble des valeurs prises par X est fini ou énumérable. La loi de X est alors donnée par les probabilités des évènements "$X = e$" lorsque e décrit l'ensemble E, autrement dit par la famille $\big(\mathrm{P}(X = e)\big)_{e \in E}$ qu'on appelle distribution de la loi.
> De façon beaucoup plus générale la loi de X est la donnée des probabilités de tous les évènements associés à X.
> On retient la forme des trois lois les plus importantes pour ce cours : la loi de Bernouilli B(p), la loi binomiale B(n,p), la loi uniforme U({1,...,n}).

Ex. 1. a. On lance un dé équilibré et on note X la valeur affichée par le dé. Quelle est la loi de X ? Proposer un modèle combinatoire pour X.

b. On lance deux dés. Quelles sont les lois respectives de $S =$ la somme des valeurs des deux dés, $T =$ l'écart entre les valeurs des deux dés (la valeur absolue de la différence), $U =$ la plus grande valeur prise par les dès.

On pourra utiliser un modèle combinatoire Ω de l'expérience et compter le nombre d'éléments des parties de Ω associées à chacune des valeurs prises par ces variables, ou bien calculer par conditionnement suivant la valeur prise par le premier dé et utiliser l'indépendance des lancés de chacun des dés, où bien réécrire les évènements en jeu de façon à pouvoir exploiter l'indépendance entre les lancés de dés.

Ex. 2. La clef d'une porte se trouve dans une boite de 20 clefs qu'on essaie successivement. Quelle est la probabilité que ce soit la k-ième clef essayée qui ouvre la porte ? On note N la variable égale au nombre de clefs testées jusqu'à ouvrir la porte. Quelle est la loi de N ?

Ex. 3. Soient $0 \leq n \leq N$ deux entiers fixés. Une urne contient n boules rouges et $N - n$ boules blanches.

a. On tire avec remise p boules dans l'urne. Quelle est la loi du nombre de boules rouges tirées ?

b. Même question si on procède à un tirage sans remise.

Ex. 4. On fixe un entier n. On répète n fois le lancé de trois dés et on compte le nombre N de fois où on a obtenu 421 lors d'un de ces lancés. Quelle est la loi de N ?

Ex. 5. On répète le lancé de trois dés jusqu'à obtenir 421 et on note N le nombre de lancés nécessaires. Quelle est la loi de N ?

Ex. 6. On choisit au hasard une partie A de 10 éléments dans $\{1, \ldots, 100\}$. Quelle est la loi de $\mathrm{Max}(A)$?

On pourra calculer la fonction de répartition $\mathbb{N} \to [0, 1]$, $n \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{Max}(A) \leq n)$.

Ex. 7. L'expérience consiste à lancer un dé équilibré puis à lancé un nombre de fois égal à la valeur affiché par le dé une pièce équilibrée. On note N le nombre de fois qu'on a obtenu Face. Quelle est la loi de N ?

Licence L2 MASS - Probabilité feuille 4 9 novembre 2015

Espérance de variable aléatoire

Ex. 1. *(traité en cours)* Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant. Calculer l'espérance et la variance de X.

x	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X = x)$	1/4	1/8	1/8	1/3	0	1/6

Ex. 2. Calculer de deux façons l'espérance de la somme des lancers de deux dés : 1. en utilisant la loi de la somme des lancers, 2. en utilisant la linéarité de l'espérance.

Ex. 3. *(traité en cours)* **a.** Donner l'expression formelle de $E(X)$ et $E(X^2)$ pour X de loi $B(p)$ (Bernouilli), $B(n,p)$ (binomiale), $U(\{1,\dots,n\})$ (uniforme)

b. Pouvez vous calculer ces espérances à partir des expressions ci-dessus ?

Ex. 4. **a.** Observer que si X est une variable aléatoire prenant la seule valeur x (ou telle que $P(X = x) = 1$) alors $\mathrm{E}(X) = x$

b. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$. Observer que X est de même loi que $n + 1 - X$. A t-on $X = n + 1 - X$? Qu'obtient on pour $E(X)$?

Ex. 5. *(traité en cours)* Soit n un entier fixé. On répète n fois une même expérience dont la probabilité de succès est p. On note, pour $1 \le k \le n$, X_k la variable de Bernouilli qui vaut 1 si la k-ième expérience est un succès. On note X le nombre de succès après les n répétitions.

Observer $X = X_1+\cdots+X_n$. En déduire l'espérance et la variance de X. Quels tests de pertinence pouvez vous faire sur les valeurs trouvées ?

Ex. 6. *(Feuille 3 ex 9 rerédigé)* Soit n un entier fixé. Soit Ω l'ensemble des n-uplets $(x_1,\dots,x_n)$ à valeurs dans $\{P, F\}$, muni de la probabilité uniforme. On note T la variable $\Omega \to \mathbb{N}$ qui associe à $(x_1,\dots,x_n)$ le premier $k \le n$ tel que $x_k = P$ si un tel k existe, l'entier $n + 1$ si $(x_1,\dots,x_n) = (F,\dots,F)$.

a. Que représente T ? Calculer sa loi. Que reconnaît on si $n = \infty$?

b. Calculer l'espérance et la variance de T. Quels tests de pertinence peut on faire sur les valeurs obtenues ?

Ex. 7. On lance un dé et on note N la valeur affichée par le dé. On lance ensuite N fois le dé et on compte le nombre de fois qu'on obtient 1 (le lancé initial ne compte pas). Que vaut $E(X), Var(X)$?

Ex. 8. A la sortie d'un restaurant, le garçon remet à n hommes venus déjeuner ensemble leurs chapeaux au hasard. Les clients sont numérotés de 1 à n : pour le client i, on désigne par X_i la variable aléatoire valant 1 si le chapeau distribué est le bon et 0 sinon. Le nombre de chapeaux correctement distribués est $X = X_1 + \cdots + X_n$.

a. Donner la loi de chaque X_i. En déduire l'espérance de X.

b. Donner la valeur de $E(X_iX_j)$ pour $i \neq j$. En déduire la variance de X.

Ex. 9. Un joueur joue à la roulette d'un casino. Il mise un euro sur une couleur à chaque fois et gagne un euro (plus sa mise) avec probabilité 18/37 ; il perd sa mise avec probabilité 19/37. Il joue n parties. On note X_i son gain à la partie i, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ son gain total (qui peut être négatif) et $Y_n = S_n/n$ son gain moyen par partie.

a. Donner la loi de X_i et calculer son espérance.

b. Donner l'espérance et la variance de Y_n.

c. On note g_n la probabilité que le joueur gagne de l'argent. Comment se comporte g_n quand $n \to \infty$?