

Loi d'une variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble E est la donnée pour chaque issue de l'expérience aléatoire d'une valeur de X dans E . Pour tout élément $e \in E$ on note " $X = e$ " l'évènement " X prend la valeur e ".

La variable aléatoire X est représentable dans un modèle (Ω, P) de l'expérience si pour chaque issue $\omega \in \Omega$, la valeur de X est bien déterminée ; on la note alors $X(\omega)$ de sorte que X est représentée par une application $\Omega \rightarrow E$.

La variable aléatoire X est discrète si l'ensemble des valeurs prises par X est fini ou énumérable. La loi de X est alors la donnée des probabilités des évènements " $X = e$ " lorsque e décrit l'ensemble E , autrement dit la donnée de la famille $(P(X = e))_{e \in E}$.

De façon beaucoup plus générale et abstraite la loi de X est la donnée des probabilités de tous les évènements associés à X .

On retient la forme des trois lois les plus importantes pour ce cours : la loi de Bernoulli $B(p)$, la loi binomiale $B(n,p)$, la loi uniforme $U(\{1, \dots, n\})$.

Ex. 1. a. On lance un dé équilibré et on note X la valeur affichée par le dé. Quelle est la loi de X ? Proposer un modèle combinatoire pour X .

b. On lance deux dés. Quelles sont les lois respectives de $S =$ la somme des valeurs des deux dés, $T =$ l'écart entre les valeurs des deux dés (la valeur absolue de la différence), $U =$ la plus grande valeur prise par les dés.

On pourra utiliser un modèle combinatoire Ω de l'expérience et compter le nombre d'éléments des parties de Ω associées à chacune des valeurs prises par ces variables, ou bien calculer par conditionnement suivant la valeur prise par le premier dé et utiliser l'indépendance des lancers de chacun des dés, où bien réécrire les évènements en jeu de façon à pouvoir exploiter l'indépendance entre les lancers de dés.

Ex. 2. La clef d'une porte se trouve dans une boîte de 20 clefs qu'on essaie successivement. Quelle est la probabilité que ce soit la k -ième clef essayée qui ouvre la porte ? On note N la variable égale au nombre de clefs testées jusqu'à ouvrir la porte. Quelle est la loi de N ?

Ex. 3. Soient $0 \leq n \leq N$ deux entiers fixés. Une urne contient n boules rouges et $N - n$ boules blanches.

a. On tire avec remise p boules dans l'urne. Quelle est la loi du nombre de boules rouges tirées ?

b. Même question si on procède à un tirage sans remise.

Ex. 4. On fixe un entier n . On répète n fois le lancé de trois dés et on compte le nombre N de fois où on a obtenu 421 lors d'un de ces lancers. Quelle est la loi de N ?

Ex. 5. On répète le lancé de trois dés jusqu'à obtenir 421 et on note N le nombre de lancers nécessaires. Quelle est la loi de N ?

Ex. 6. On choisit au hasard une partie A de 10 éléments dans $\{1, \dots, 100\}$. Quelle est la loi de $\text{Max}(A)$?

On pourra calculer la fonction de répartition $\mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$, $n \mapsto P(\text{Max}(A) \leq n)$.

Ex. 7. L'expérience consiste à lancer un dé équilibré puis à lancer un nombre de fois égal à la valeur affichée par le dé une pièce équilibrée. On note N le nombre de fois qu'on a obtenu Face. Quelle est la loi de N ?