

Variables aléatoires continues

Ex. 1. (*traité en cours*) Calculer l'espérance et la variance des lois $\mathcal{U}([a, b])$ (uniforme), $\mathcal{E}(\lambda)$ (exponentielle), $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (normale ou gaussienne).

Ex. 2. Soient X une v.a. admettant une densité f et $a \neq 0, b$ deux réels. Calculer la densité de $Y = aX + b$ en fonction de f, a, b .

Comment s'interprète la probabilité $P(X \leq t)$ (pour t un nombre réel donné) sur le graphe de f ?

Quel lien y a-t-il entre le graphe de la densité de X et celui pour Y ? Entre le graphe de la fonction de répartition de X et celui pour Y ?

Calculer l'espérance et la variance de Y en fonction de celles de X et de a, b .

Que se passe-t-il si $a = 0$?

Ex. 3. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{U}([0, 2])$. On pose $Y = 1$ si $X \leq 3/2$, $Y = 0$ sinon. Quelle est la loi de Y ?

Ex. 4. Soit X une v.a. dont la loi est donnée par :

$$P(X \leq t) = \begin{cases} (t+1)/4 & \text{si } -1 \leq t < 2 \\ 4(t-1)/5 & \text{si } 2 \leq t < 9/4 \end{cases}$$

Que peut-on dire de $P(X = 2)$? de $P(X = 9/4)$?

X admet-elle une densité ?

*Calculer l'espérance de X .

Ex. 5. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{U}([1, 2])$. $Y = X^2$ admet-elle une densité ? Si oui laquelle ?

En déduire une expression pour $\text{Var}(X)$. Est-ce une bonne méthode pour calculer $\text{Var}(X)$?

Mêmes questions avec X de loi $\mathcal{U}([-1, 2])$

Mêmes questions avec X de loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$

Ex. 6. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{U}([-2, 2])$ et posons $Y = X^2$. Calculer la covariance de X, Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Ex. 7. Soient X, Y deux v.a. indépendantes de loi $\mathcal{U}([0, 1])$.

*Déterminer la densité de $\text{Max}(X, Y)$, $X + Y$ et de $X - Y$.

Calculer l'espérance et la variance de $X - Y$.

8. a. Soit Y une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{R} telle que pour tout $t \geq 0$ on a $P(Y \leq t) = 1 - \exp(-t)$. Calculer l'espérance de Y .

b. On tire un nombre réel X dans l'intervalle $[0, 1]$ suivant la loi uniforme et on pose $Y = -2 \ln(1 - X)$.

Quel est l'intervalle des valeurs possibles pour Y ?

Soit t un réel positif. À quel ensemble de valeurs de X correspond l'évènement $Y \leq t$?

En déduire la fonction de répartition de Y puis sa densité. Quelle loi reconnaît-on ?