Université de Nice Sophia Antipolis — Examen

L2Mass, Math 3, 2017/18 — durée 3 heures

Les documents et les calculatrices sont interdits.

Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte, et il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1 *1. Soient* $u = (1, 0, -2, -1), v = (1, 6, 4, -1), w = (-2, -3, 1, 2)$. *On pose* $F = vect(u, v, w)$.

(a) *Déterminer une base* $\mathcal{F}$ *du sous-espace vectoriel* F *et donner* $\dim F$.

(b) *Peut-on représenter* F *comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire ? Si oui, explicitez-le !*

2. *Soit* G *l'ensemble des solutions de*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

(a) *Déterminer une base* $\mathcal{G}$ *du sous-espace vectoriel* G *de* $\mathbb{R}^4$ *et donner* $\dim G$.

3. *Déterminer* $F \cap G$.

Exercice 2 *Soient* a *et* b *deux nombres réels. On considère la matrice* $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$.

1. *Est-il possible de fixer des valeurs réelles* a *et* b *pour que* $M_{a,b}$ *soit diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *?*

2. *Peut-on fixer des valeurs réelles* a *et* b *pour que* $M_{a,b}$ *ne soit pas diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *?*

3. *Donner la condition nécessaire et suffisante pour que* $M_{a,b}$ *soit diagonalisable sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *1. Donner un exemple d'une matrice* A *réelle* 3×3 *ayant une valeur propre triple et qui n'est pas diagonalisable sur* $\mathbb{R}$.

2. *Donner un exemple d'une matrice* B *réelle* 3×3 *ayant une valeur propre triple et qui est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$.

3. *Soit* M *une matrice* 3×3 *réelle ayant une valeur propre triple. Expliciter la forme de* M *pour qu'elle soit diagonalisable sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 4 *Le gouvernement de Workland étudie l'évolution du taux de chômage pour préparer une politique de l'emploi. Un suivi périodique (à unité de temps fixe) est réalisé par le ministère du travail.*

A Workland, le taux de chômage est 4%, *soit* 14000 *personnes actives sans emploi. La probabilité qu'une personne sans emploi trouve un travail à la période suivante est* 70% *alors que la probabilité qu'une personne active reste employée à la période suivante est* 90% .

1. *Quel est le nombre d'actifs à Workland ?*

2. *Modéliser ce problème et montrer que son suivi se ramène au calcul de la puissance d'une matrice* A *que l'on précisera.*

3. *Diagonaliser* A.

4. *Calculer* A^n, *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

5. *Déterminer le nombre d'actifs ayant un emploi pendant la période* n *à Workland.*

6. *En supposant que le nombre d'actifs est constant, en déduire le taux de chômage sur le long terme.*

7. *En fonction de ce taux, que feriez-vous si vous étiez président de Workland ?*