L3 MASS 2 mai 2005

Correction de l'examen Jeux et Décisions

Première partie : **THÉORIE DES JEUX**

Exercice 1

a) On supprimme les stratégies dominées de Y. On obtient l'ensemble $Y' \subseteq Y$. On sait que cela ne change pas la valeur du jeu en stratégie mixte. Ensuite on ordonne les stratégies de Y' de façon à avoir la première ligne décroissante. Nécessairement cette ligne est strictement décroissante, et la seconde ligne est strictement croissante (sinon il existe une stratégie dominée par une autre).

b) Attention : une stratégie de Y est dominée par une autre si elle est supérieure à une autre en gains de X. On obtient donc $m = 3$ et le tableau suivant.

4	2	1
-1	0	2

En attribuant la coordonnée p à x_1 et $1-p$ à x_2, on dessine les droites d'équations :

- pour y_1 : $u = 5p - 1$
- pour y_2 : $u = 2p$
- pour y_3 : $u = -p + 2$

Graphiquement on voit que la stratégie mixte optimale de X est donnée par l'intersection des droites correspondant à y_2 et y_3, c'est à dire par le système : $\bar{u} = 2\bar{p}$, $\bar{u} = -\bar{p} + 2$. On trouve donc la **valeur du jeu en stratégie mixte** $\bar{u} = \frac{4}{3}$ et la **stratégie mixte optimale** $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ **pour** X.

On en déduit de plus que la coordonnée associée à y_1 pour les stratégies mixtes optimales de Y est nulle. En attribuant la coordonnée q à y_2, on a donc $\bar{u} = 2\bar{q} + (1 - \bar{q})$ (avec x_1), d'où $\bar{q} = \frac{1}{3}$. On trouve donc la **stratégie mixte optimale** $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ **pour** Y.

On peut vérifier que l'on obtient bien le même résultat avec x_2, puisque $\bar{q}$ doit vérifier aussi $\bar{u} = 0\bar{q} + 2(1 - \bar{q})$.

Exercice 2

a) Chacun a deux stratégies possibles : aller danser (D) ou aller au match (M).

		Barnabé D	Barnabé M
Alice	D	3, 1	0, 0
Alice	M	0, 0	1, 3

Les définitions donnent immédiatement :

- pas de stratégie dominante pour A ni pour B,
- (D,D) et (M,M) équilibres de Nash
- (D,D) et (M,M) optimums Pareto

b)

		Barnabé	
		D	M
		1	2
	D	3	2
		0	3
Alice	M	0	1

Les définitions donnent immédiatement :

- D stratégie dominante pour A, M pour B, d'où (D,M) équilibre en stratégies dominantes.
- (D,M) seul équilibre de Nash
- (D,D), (M,M) et (D,M) optimums Pareto

Exercice 3

Le jeu étant symétrique, on a $u(x,x) = 0$ pour tout $x \in X$. Si le jeu a un point selle $(\bar{x}, \bar{y})$, alors pour tout $x, y \in X$, on a $u(x, \bar{y}) \leq u(\bar{x}, \bar{y}) \leq u(\bar{x}, y)$, donc $u(\bar{y}, \bar{y}) \leq u(\bar{x}, \bar{y}) \leq u(\bar{x}, \bar{x})$ donc $u(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

De plus, $(\bar{x}, \bar{y})$ point selle

$\Leftrightarrow u(\bar{x}, \bar{y}) = inf_{y \in X} u(\bar{x}, y) = sup_{x \in X} u(x, \bar{y})$

$\Leftrightarrow -u(\bar{x}, \bar{y}) = sup_{y \in X} - u(\bar{x}, y) = inf_{x \in X} - u(x, \bar{y})$

$\Leftrightarrow u(\bar{y}, \bar{x}) = sup_{y \in X} u(y, \bar{x}) = inf_{x \in X} u(\bar{y}, x)$ (car u est symétrique)

$\Leftrightarrow (\bar{y}, \bar{x})$ point selle.

Exercice 4

a) Si X tire avant Y, c'est à dire si $x < y$, alors X a une probabilité $a(x)$ de toucher Y et gagner 1, et une probabilité $1 - a(x)$ de manquer son coup et donc d'être touché ultérieurement et de gagner -1. L'espérance de gain de X est donc $u(x,y) = a(x) - 1(1 - a(x)) = 2a(x) - 1$.

De même, si Y tire avant X, c'est à dire si $x > y$, on a $u(x,y) = -b(y) + (1 - b(y)) = 1 - 2b(y)$

Enfin si $x = y$ alors les coups de feus partent au même instant, X a donc une probabilité $a(x)$ de toucher Y et une probabilité $b(x)$ d'être touché. Donc $u(x,y) = a(x) - b(x)$.

b) Pour x fixé, on a $u(x,y) = 2a(x) - 1$ pour $y > x$, $u(x,y) = 1 - 2b(y) \geq 1 - 2b(x)$ pour $y < x$ car b est croissante. Donc $inf_{y \in [0,1]} u(x,y) = inf(2a(x) - 1, 1 - 2b(x), a(x) - b(x))$. La fonction $2a(x) - 1$ est strictement croissante, la fonction $1 - 2b(x)$ est strictement décroissante, et la fonction $a(x) - b(x)$ est la moyenne des deux, donc $sup_{x \in [0,1]} inf_{y \in [0,1]} u(x,y)$ est atteint pour l'unique $\bar{x}$ vérifiant $2a(\bar{x}) - 1 = 1 - 2b(\bar{x})$, c'est à dire $a(\bar{x}) + b(\bar{x}) = 1$. La valeur est alors $a(\bar{x}) - b(\bar{x})$.

Avec un raisonnement similaire, on trouve que $inf_{y \in [0,1]} sup_{x \in [0,1]} u(x,y)$ est atteint pour l'unique $\bar{y}$ vérifiant $a(\bar{y}) + b(\bar{y}) = 1$, c'est à dire $\bar{y} = \bar{x}$.

Les deux valeurs étant égales, le jeu a une valeur en stratégie pure, et X et Y ont la même stratégie optimale dans $\bar{x} = \bar{y} \in [0,1]$ définie par $a(\bar{x}) = 1 - b(\bar{x})$.