L2 MASS - option Théorie des jeux **Corrigé de la feuille 3**

Ex 2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{g} = 0 < \bar{g} = 1$ donc pas d'équilibre en stratégies pures.

Stratégies mixtes prudentes du joueur 1 : $(p, 1-p)$ maximisant $\min(2(1-p), p)$.
$2(1-p) = p \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$. Sur $[0, \frac{2}{3}]$, $\min(2(1-p), p)$ vaut p donc est croissante. Sur $[\frac{2}{3}, 1]$, $\min(2(1-p), p)$ vaut $2-2p$ donc est décroissante. Le max est donc atteint en $p_0 = \frac{2}{3}$.

Stratégies mixtes prudentes du joueur 2 : $(q, 1-q)$ minimisant $\max(1-q, 2q)$.

$1-q = 2q \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$. Sur $[0, \frac{1}{3}]$, $\max(1-q, 2q)$ vaut $1-q$ et est décroissant. Sur $[\frac{1}{3}, 1]$, $\max(1-q, 2q)$ vaut $2q$ et est croissant. Donc le min est atteint en $q_0 = \frac{1}{3}$.

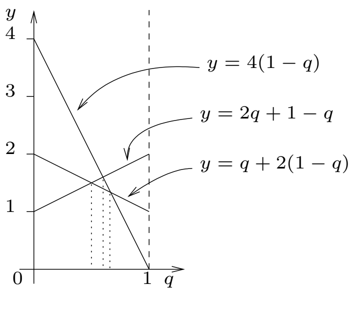
On sait que les équilibres en stratégies mixtes sont les couples de stratégies mixtes prudentes (puisque l'extension mixte du jeu admet une valeur). Seul équilibre en stratégies mixtes : $((p_0, 1-p_0), (q_0, 1-q_0)) = ((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$.

Ex 3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. $\underline{g} = 1 < \bar{g} = 2$ donc pas d'équilibre en stratégies pures.

On cherche d'abord les stratégies mixtes prudentes du joueur 2 car le joueur 2 a moins de stratégies pures que le joueur 1. Il ne semble pas y avoir de stratégies pures dominées dans l'extension mixte du jeu (mais on se trompe, voir plus loin).

On cherche donc $q \in [0,1]$ minimisant $G_2(q) := \max(2q + 1 - q, q + 2(1-q), 4(1-q)$. On cherche d'abord les $q \in [0,1]$ pour lesquels on a une égalité.

$2q + 1 - q = q + 2(1-q) \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$
$2q + 1 - q = 4(1-q) \Leftrightarrow q = \frac{3}{5}$
$q + 2(1-q) = 4(1-q) \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}$
On a $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$. Sur chacun des intervalles $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$, $[\frac{3}{5}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ G_2 est l'application $q \mapsto 2q + 1 - q$ ou $q \mapsto q + 2(1-q)$ ou $q \mapsto 4(1-q)$.
Sur $[0, \frac{1}{2}]$, $G_2(q) = 4(1-q) = 4 - 4q$ (il suffit de comparer $2q+1-q$, $q+2(1-q)$ et $4(1-q)$ en $q = 0$) donc G_2 y est décroissante.
Sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$, $G_2(q) = 4(1-q)$. (On compare $2q+1-q, q+2(1-q), 4(1-q)$ en $q = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{3}{5}$.)
Sur $[\frac{3}{5}, \frac{2}{3}]$, $G_2(q) = 2q + 1 - q = q + 1$ donc G_2 y est croissante.
Sur $[\frac{2}{3}, 1]$, $G_2(q) = 2q + 1 - q = q + 1$ comme précédemment.



G_2 est strictement décroissante puis strictement croissante. Son min est donc atteint en $q_0 = \frac{3}{5}$.

Stratégies mixtes prudentes du joueur 1 :

Puisqu'un couple de stratégies mixtes prudentes est un équilibre, une stratégie mixte prudente du joueur 1 est une meilleur réponse à la stratégie mixte prudente $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ du joueur 2.
la stratégie 1 du joueur 1 face à la stratégie mixte prudente du joueur 2 donne l'espérance de gain $2\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{8}{5} = \underline{G}$, la stratégie 2 donne l'espérance de gain $\frac{3}{5} + 2\frac{2}{5} = \frac{7}{5} < \underline{G}$. La stratégie 3 donne l'espérance de gain $4\frac{2}{5} = \frac{8}{5} = \underline{G}$.
On en conclut qu'une stratégie mixte (p_1, p_2, p_3) du joueur 1 ne peut pas être une meilleure réponse à la stratégie mixte prudente du joueur 2 si $p_2 \neq 0$. Donc les stratégies mixtes prudentes du joueur 1 sont à chercher parmis les stratégies mixtes $(p, 0, 1-p)$.

On connait la valeur de l'extension mixte du jeu : $\underline{G} = \bar{G} = G_2(q_0) = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$. Les stratégies mixtes prudentes du joueur 1 sont les $(p, 0, 1-p)$ vérifiant :
$\min(2p, p + 4(1-p)) = \underline{G} = \frac{8}{5}$ ce qui équivaut à $2p \geq \frac{8}{5}$ et $p + 4(1-p) \leq \frac{8}{5}$ soit $p \geq \frac{4}{5}$ et $p \leq \frac{4}{5}$ donc $p = \frac{4}{5}$.
$(\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5})$ est la seule stratégie mixte prudente du joueur 1.

Rq. On observe sur la figure que la stratégie 2 du joueur 1 est strictement dominée par une combinaison des stratégies 1 et 3 dans l'extension mixte du jeu. Vérifions : on cherche $p \in [0,1]$ tel que la stratégie pure 2 soit strict. dominée par la stratégie mixte $(p, 0, 1-p)$. p doit vérifier $1 < 2p$ et $2 < p + 4(1-p)$ ce qui équivaut à $p > \frac{1}{2}$ et $p < \frac{2}{3}$. N'importe quel p dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[$ convient. On retrouve ainsi le fait que les stratégies mixtes prudentes du joueur 1 sont de la forme $(x, 0, 1-x)$ avec $x \in [0,1]$.

Ex 4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

La stratégie 3 du joueur 2 est dominée dans l'extension mixte du jeu ssi il existe $q \in [0,1]$ tel que la stratégie 3 soit dominée par la stratégie mixte $(q, 1-q, 0)$, ce qui équivaut à :
$0 > q + 3(1-q)$ et $4 > 2q + 1 - q$, ce qui équivaut à $q > \frac{3}{2}$ et $q < 3$. Il n'y a pas de solution dans $[0,1]$.

Ex 5. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix}$. La stratégie 3 du joueur 2 est dominée (au sens large) dans l'extension mixte du jeu ssi il existe $q \in [0,1]$ tel que $a \geq q + 3(1-q)$ et $b \geq 2q + 1 - q$ ce qui équivaut à $q \geq \frac{3-a}{2}$ et $q \leq b - 1$. Un tel q ($\in [0,1]$!) existe ssi $\frac{3-a}{2} \leq b - 1$, $0 \leq b - 1$ et $\frac{3-a}{2} \leq 1$ c'est-à dire si $b \geq 1$, $b \geq \frac{5-a}{2}$ et $a \geq 1$.

Ex 6. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. On veut calculer la valeur ($\underline{\mathrm{G}}$) de l'extension mixte du jeu.

Par définition d'une stratégie prudente, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ est une stratégie mixte prudente du joueur 1 ssi
$\min_{\substack{q_1, q_2, q_3, q_4 \geq 0 \\ q_1+q_2+q_3+q_4=1}} G((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0), (q_1, q_2, q_3, q_4)) = \underline{\mathrm{G}}$. Or

$$\begin{aligned}
\min_{\substack{q_1, q_2, q_3, q_4 \geq 0 \\ q_1+q_2+q_3+q_4=1}} G((\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0, 0), (q_1, q_2, q_3, q_4)) &= \min_{\substack{(q_j) \in \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), \\ (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}}} G((\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0, 0), (q_j)) \\
&= \min(2\tfrac{1}{3} + 4\tfrac{2}{3}, 6\tfrac{1}{3} + 2\tfrac{2}{3}, 5\tfrac{1}{3} + 3\tfrac{2}{3}, 8\tfrac{2}{3}) \\
&= \min(\tfrac{10}{3}, \tfrac{10}{3}, \tfrac{11}{3}, \tfrac{16}{3}) \\
&= \tfrac{10}{3}\ .
\end{aligned}$$