L2 Mass - Théorie des jeux Corrigé de l'interrogation du 9 novembre 2010

1. Le jeu n'est pas à somme nulle puisque la somme des paiements des 2 joueurs si chacun joue la stratégie 1 est $1+1=2$.
La stratégie 2 du joueur 2 est strict^t dominée par la stratégie 1 : quelque soit le choix du joueur 1, le paiement du joueur 2 est strict^t plus grand s'il joue 1 plutôt que 2.
Le joueur 1 n'a pas de stratégie dominée.

Puisque la stratégie 2 de J2 est strict^t dominée par l'autre stratégie, J2 regrettera toujours 2 et ne regrettera jamais 1. J2 jouant 1 (sinon il n'y a pas équilibre), J1 préfère strict^t la stratégie 2 à la stratégie 1 donc le couple de stratégie $(2,1)$ est le seul équilibre du jeu.
La stratégie 1 de J2 est prudente puisque strictement dominante. La stratégie 2 de J1 n'est pas prudente : elle ne garantit que le paiement -2 alors que la stratégie 1 garantit le paiement -1.

2a. Le joueur 1 a 6 stratégies (le nbre de lignes). Le joueur 2 a 7 stratégies (le nbre de colonnes). Si J1 joue 2 et J2 joue 4 le gain de J1 est -1 donc le gain de J2 est 1 puisque le jeu est à somme nulle.

b. Par inspection : les stratégies 3 et 5 de J1 sont dominées par la stratégie 4
les stratégies 5 et 7 de J2 sont dominées par la stratégie 3

c. En éliminant les stratégies dominées (question b) on obtient la matrice de paiement $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Maintenant les strat. 2 et 4 de J1 sont dominées par la strat. 3 ; les stratégies 1 et 5 de J2 sont dominées par la strat. 2. On obtient la matrice de paiement $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
La stratégie 3 de J2 est dominée par la strat. 2. On obtient $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. La stratégie 1 de J1 est dominée par la strat. 2. On obtient $\begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$. La stratégie 1 de J2 est dominée par la strat. 2. On obtient la matrice de paiement (3).
Ce dernier jeu admet la valeur $\underline{g} = \bar{g} = 3$. On sait qu'alors le jeu initial admet la même valeur $\underline{g} = \bar{g} = 3$

d. Les équilibres du jeu donnent 3 comme paiement au joueur 1. On inspecte les 12 couples de stratégies donnant le gain 3 à J1
$(1,3)$ et $(1,6)$ sont regrettés par J2 (qui préfère 2). $(3,1)$ et $(3,7)$ sont regrettés par J1. $(3,3)$ est un équilibre.
$(4,3)$ est ~~(4,7) sont regrettés~~ aussi un équilibre. $(4,7)$ est regretté par J1. $(5,2)$, $(5,3)$ et $(5,7)$ sont regrettés par J2.
$(6,1)$ et $(6,2)$ sont regrettés par J1. Conclusion : $(3,3)$ et $(4,3)$ sont les seuls équilibres.
Autre méthode : les stratégies prudentes de J1 sont celles garantissant le gain 3. Seules les stratégies 3 et 4 le garantissent. Les strat. prudentes de J2 sont celles garantissant une perte au plus de 3. Seule la stratégie 3 le garantit. Puisque le jeu admet une valeur, les équilibres sont les couples de stratégies prudentes, donc $(3,3)$ et $(4,3)$.

3. $X = Y = [1,3]$; $g(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$

a. La stratégie $x \in X$ est dominée par x' si $\forall y \in Y$ $g(x,y) \leq g(x',y)$. Ceci est lié à la monotonie de la fonction $x \mapsto g(x,y)$.
On calcule la dérivée par rapport à x $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + y$. On $x \geq 1$ donc $\frac{1}{x^2} \leq 1$ et $-\frac{1}{x^2} \geq -1$ avec égalité si $x=1$.
$y \geq 1$ donc $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \geq -1+1=0$ avec égalité si $x=1$ et $y=1$. On en déduit que pour tout $y \in Y$, $x \mapsto g(x,y)$ est strictement croissante. En particulier $\forall y \in Y$, $\forall x \in X \setminus \{3\}$, $g(x,y) < g(3,y)$. Autrement dit toute stratégie $x \in X \setminus \{3\}$ est strictement dominée par la stratégie $3 \in X$ (pour J1). On

(3a) Comme g est symétrique en x, y l'application $y \mapsto g(x,y)$ est également strict^t croissante donc $\forall x \in X, \forall y > 1, g(x,1) < g(x,y)$
Autrement dit toute stratégie $y > 1 \in Y$ est strictement dominée par la stratégie $1 \in Y$ (pour J2)

3b. Comme $x = 3 \in X$ est strict^t dominante, le joueur 1 ne regrettera pas le choix de 3. Comme $y = 1 \in Y$ est strict^t dominante pour J2, le joueur 2 ne regrettera pas le choix de 1. Donc $(3,1)$ est un équilibre. Donc le jeu admet une valeur et $g(3,1) = \frac{1}{3} + 1 + 3 = \frac{13}{3}$ est la valeur du jeu.

<u>Autre méthode</u> : on calcule $\inf_{y \in Y} g(x,y)$ en fonction de x par une étude de la fonction $y \mapsto g(x,y)$ puis $\underline{g} = \sup_{x \in X} (\inf_{y \in Y} g(x,y))$
et on calcule de même $\inf_{y \in Y} (\sup_{x \in X} g(x,y)) = \overline{g}$. Si $\underline{g} = \overline{g}$ alors le jeu admet une valeur et cette valeur est $\underline{g} = \overline{g}$

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = -\frac{1}{y^2} + x \geq 0 \text{ donc } y \mapsto g(x,y) \text{ est croissante donc } \inf_{y \in [1,3]} g(x,y) = g(x,1) = \frac{1}{x} + 1 + x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} + 1 + x\right) = -\frac{1}{x^2} + 1 \geq 0 \text{ donc } x \mapsto \frac{1}{x} + 1 + x \text{ est croissante donc } \sup_{x \in [1,3]}\left(\frac{1}{x} + 1 + x\right) = \frac{1}{3} + 1 + 3 = \frac{13}{3} = \underline{g}$$

On calcule de même $\overline{g} = \frac{13}{3}$

4. $\underline{g} = -1$, $\overline{g} = 1$, $g(x,y) = 0$. Le gain du joueur 1 est strict^t supérieur à son gain garanti optimal $\underline{g}$ donc il ne lui était pas garanti donc $\exists y' \in Y, g(x,y') < g(x,y)$ donc le joueur 2 regrette son choix.
$g(x,y)$ est aussi la perte du joueur 2 ici strict^t inférieure à la majoration optimale de la perte de J2 donc $g(x,y)$ n'était pas garantie à J2 autrement dit $\exists x' \in X, g(x',y) > g(x,y)$ donc le joueur 1 regrette lui aussi son choix.

Si on suppose maintenant $g(x,y) = -1$, à nouveau la perte de J2 n'était pas garantie donc J1 regrette son choix.
-1 était garanti à J1 donc on ne peut dire si J2 regrette son choix (il est possible que J2 regrette son choix, très exactement si x n'est pas prudente, ce qu'on ne peut déduire du seul fait $g(x,y) = -1$).