

On représente ci-dessous des jeux à deux joueurs sous forme normale en donnant la matrice des paiements (ou gains) des deux joueurs, ou, lorsque le jeu est à somme nulle, celle des paiements du premier joueur.

1. Le jeu "pierre-papier-ciseaux"

Deux enfants jouent à "pierre-papier-ciseaux" comme suit : Ils sont assis face à face autour d'une table. Chacun symbolise en cachette par la forme de la main droite soit la pierre (poing fermé), soit le papier (main ouverte avec les doigts joints), soit les ciseaux (main ouverte avec les doigts en forme de V). Ils frappent simultanément le dessus de la table avec leur main et marquent ainsi un point ou zéro suivant la règle suivante : le papier l'emporte sur la pierre (la réduit en poussière...), la pierre l'emporte sur les ciseaux, les ciseaux l'emporte sur le papier.

Donner la forme normale de ce jeu. Rechercher les éventuels équilibres par inspection.

2. On reprend le jeu précédent mais en faisant jouer successivement le 1er enfant puis le second : le premier montre sa main ; le second choisit en conséquence et montre sa main.

Quelle est la forme extensive de ce jeu ? Quelles sont les stratégies de chacun des joueurs ? Quelle est la forme normale correspondante ? Quels sont les équilibres de ce jeu ? Le jeu sous cette forme présente-t-il un intérêt pour les enfants ?

3. "pierre-papier-ciseaux" biaisé.

On reprends le jeu de la première question. Comment peut on modéliser ce jeu sous forme extensive ?

Le plus jeune enfant peine à faire un V avec sa main et laisse transparaître ce choix à son adversaire bien qu'il s'efforce de cacher son jeu. Modéliser cette situation par un jeu sous forme extensive. Quelle est la forme normale correspondante du jeu ? Ce jeu admet-il des équilibres ?

4. Variations sur le dilemme des prisonniers

Deux malfaiteurs sont arrêtés pour un même forfait et interrogés séparément. S'ils sont déclarés coupables, ils seront condamnés à deux ans de prison. A défaut ils seront relâchés. Lors de leur interrogatoire on leur propose une remise de peine d'un an s'ils collaborent.

Quelles sont les stratégies de chacun des prisonniers ? Par quel gain peut on modéliser l'issue des interrogatoires ? Quelle est alors la forme normale du "jeu" ? Quels sont les équilibres éventuels ?

5. Pour chacun des jeux sous forme normale ci-dessus donner pour chacune des stratégies du joueur 1 la meilleure réponse du joueur 2 puis pour chacune de ces meilleures réponses du joueur 2 la meilleure réponse du joueur 1. Conclusion en terme d'équilibre ?

6. Deux marchands se partagent une clientèle uniformément répartie sur une plage de longueur 1 en choisissant leurs positions, respectivement x et y dans $[0, 1]$, les clients allant au marchand le plus proche. Le gain de chacun des marchands est proportionnel à la part de clientèle captée, de sorte que la somme des gains des deux marchands est indépendante de x et de y . Si $x = y$ les gains des deux marchands sont égaux.

Quelle est la forme normale du jeu ? Y a-t-il une meilleure réponse du marchand 2 si le marchand 1 choisit $x < \frac{1}{2}$? Le jeu admet-il un équilibre ? Y a-t-il parmi les stratégies du marchand 1 des stratégies dominées ?

7. Pour les jeux suivants indiquer les stratégies (pures) prudentes de chaque joueur. Si chacun des joueurs jouent prudemment, regrettent-ils a posteriori leur choix de stratégie ?

$$\left(\begin{array}{cc} (3, 3) & (-1, 2) \\ (2, -1) & (0, 0) \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} (3, 3) & (-1, 2) \\ (2, 1) & (0, 0) \end{array} \right).$$

Les joueurs gagnent-ils à jouer prudemment ?

8. *Jeu extrait du film "la fureur de vivre"*

Deux jeunes irresponsables roulent en voiture à toute allure l'un vers l'autre jusqu'à ce que l'un des deux freine avant l'autre (ou pas). Leur "gain" à l'issue du jeu peut être quantifié comme suit : s'ils freinent en même temps, le gain est 2 pour chacun. Si l'un freine avant l'autre, son gain est 0 alors que l'autre gagne 4. Si aucun des deux ne freine c'est l'accident, le gain est -2 pour chacun.

Les équilibres du jeu sont ils prudents pour chacun des joueurs ?

9. Construire un jeu à deux joueurs, chaque joueur ayant 3 stratégies, admettant un équilibre mais tel que le jeu obtenu en supprimant les stratégies dominées n'admette pas d'équilibre.