L2 MASS - option Théorie des jeux **feuille 3** **18 novembre 2011**

1. (Interrogation d'oct. 2008) On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle suivant : $X = Y = [0,1]$, $g(x,y) = x^2 - xy - 1$ (paiement du premier joueur).

Montrer que l'un des joueurs a une stratégie dominante. Le jeu admet-il un équilibre ?

2. On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle suivant : $X = Y = [0,1]$, $g(x,y) = -2xy - x - y + 2$ (paiement du premier joueur).

- **a.** Quel est le paiement garanti du joueur 1 s'il joue x ? Quel est le paiement garanti optimal du joueur 1 ?
- **b.** Le jeu admet-il une valeur ?

3. Dans le jeu des deux généraux, la matrice de paiement du général A est

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si A choisit sa stratégie au hasard de façon équiprobable, quelle est la probabilité que B gagne s'il choisit la colonne 1 ? la colonne 2, etc. Quelle est son espérance de gain pour chacune de ses stratégies ? Conclusion ? Comparer avec le jeu obtenu après élimination des stratégies dominées.

4. Comment peut on simuler avec une pièce de monnaie une variable aléatoire prenant la valeur 1 avec proba $\frac{2}{5}$ et la valeur 2 avec proba $\frac{3}{5}$? Avec votre méthode combien de fois en moyenne faut-il lancer la pièce de monnaie pour obtenir une valeur de la variable aléatoire ?

5. Le jeu matriciel $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ admet-il un équilibre en stratégies pures ? Quels sont les équilibres en stratégies mixtes ?

6. (examen de décembre 2010)

- **a.** Soit f une fonction affine de l'intervalle $[0,1] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On connaît $f(0) = -2$ et $f(1) = -3$. Que peut on dire de $\sup_{x \in [0,1]} f(x)$ (*i.e.* connaît on sa valeur) ? Que peut on dire de l'ensemble des $x \in [0,1]$ où f est maximale ?
- **b.** f est une fonction affine du triangle plein $\triangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$.

  On connaît $f(0,0) = 2$, $f(0,1) = \frac{3}{2}$ et $f(1,0) = \frac{3}{2}$. Que peut on dire de $\inf_{(x,y) \in \triangle} f(x,y)$? Que peut on dire de l'ensemble des $(x,y) \in \triangle$ où f est minimale ?
- **c.** f est la fonction de $\triangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

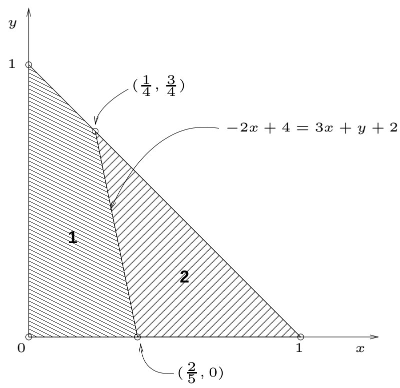
  $$f(x,y) = \min\{-2x + 4,\ 3x + y + 2\} .$$

  On représente au dos les deux zones de $\triangle$ délimitée par la droite d'équation $-2x + 4 = 3x + y + 2$.

  Quels sont les coins de la zone 1 ?

  Quelle est l'expression de f dans la zone 1 ? et dans la zone 2 ?

  Que vaut le max de f dans la zone 1 ? En quels points de la zone 1 ce max est il atteint ? Qu'en est il pour la zone 2 ?



Que vaut le max de f sur $\triangle$? En quels point de $\triangle$ ce max est il atteint ?

7. On considère le jeu matriciel $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Y a t-il un équilibre en stratégies pures ? Quelles sont les stratégies mixtes prudentes du joueur 2 ? Quelles sont les stratégies mixtes prudentes du joueur 1 ?

8. Soit le jeu de matrice de paiement $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que la stratégie 3 du joueur 2 n'est pas dominée dans l'extension mixte du jeu.

9. Soit le jeu de matrice de paiement $\begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a et de b la stratégie 3 du joueur 2 est-elle dominée dans l'extension mixte du jeu ?

10. On découvre que la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ du joueur 1 est prudente pour l'extension mixte du jeu de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la valeur de l'extension mixte du jeu ?

11. (examen de décembre 2010)
On considère le jeu à somme nulle de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Quel est le gain moyen du joueur 1 s'il joue la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ et si le joueur 2 joue la colonne 1 ?

Même question avec les colonnes 2, 3 et 4.

b. Quelles sont parmis les stratégies mixtes du joueur 2 les meilleures réponses à la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ du joueur 1 ?

c. On découvre que la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ du joueur 1 est prudente.

Une stratégie mixte prudente du joueur 2 est elle forcément une meilleure réponse à la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ du joueur 1 ? Expliquez.

Inversement une meilleure réponse du joueur 2 à la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ du joueur 1 est elle forcément prudente ? Expliquez.

d. Déduire de ce qui précède la valeur de l'extension mixte du jeu.

e. *Bonus : Quelles sont les stratégies mixtes prudentes du joueur 1 ? et du joueur 2 ?*