L2 Mass - Théorie des jeux   Corrigé de l'interrogation du 26 oct. 2012

1. J1 a 5 stratégies (nbre de lignes) ; J2 en a 6

Si J1 joue la ligne 3 et J2 la colonne 4 le gain de J1 est -3, celui de J2 est 3 puisque le jeu est à somme nulle.

Si J2 joue la colonne 1, les meilleures réponses de J1 sont les lignes 2 et 5 (celles maximisant son gain).

2 —— 1, 4, 5
3 —— 4, 5
4 —— 2
5 —— 1, 5
6 —— 1

Si J1 joue la ligne 2 les meilleures réponses de J2 sont : la colonne 2 (celles minimisant la perte de J2)
etc.

Dessin : O : meilleures réponse de J1 selon la colonne choisie par J2, □ : meilleure réponse de J2 selon la ligne choisie par J1

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & \boxed{-1} & 2 & 5 & 7 \\
3 & \boxed{-4} & -2 & 5 & 1 & 3 \\
2 & -1 & -1 & \boxed{-3} & 4 & 2 \\
\boxed{-3} & 1 & 1 & -2 & 0 & 3 \\
3 & \boxed{1} & \boxed{1} & 2 & 5 & 3
\end{array}$$

(i,j) est un équilibre du jeu $\Leftrightarrow$ i est une meilleure réponse de J1 à j et j est une meilleure réponse de J2 à i

$\Leftrightarrow$ ~~(i,j) est~~ la position (i,j) est entourée par O et par □

$\Leftrightarrow$ $(i,j) = (5,2)$ ou $(5,3)$

2. Le jeu est à somme nulle puisque pour chaque ligne et chaque colonne la somme des gains des deux joueurs est 0

On sait que pour un jeu à somme nulle les équilibres sont toujours des couples de stratégies prudentes.

La ligne 1 est strict^t dominée (pour J1) si elle est strict^t dominée par la ligne 2 ou 3 donc si on a :

$(2a-1 < a^2$ et $1 < a)$ ou $(2a-1 < 1$ et $1 < 2a^2)$

On a $a^2 - (2a-1) = (a-1)^2 > 0$ dès que $a \neq 1$ donc la ligne 1 est strict^t dominée par la ligne 2 ssi $a > 1$.

On a $2a-1 < 1 \Leftrightarrow a < 1$ et $1 < 2a^2 \Leftrightarrow a > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc la ligne 1 est strict^t dominée par la ligne 3 ssi $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $a \in]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$

Conclusion : la ligne 1 est strict^t dominée ssi $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $a \in]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$ ou $a > 1$

La stratégie 2 de J1 est prudente ssi $\min\{2a-1, 1\} \leq \min\{a^2, a\} \geq \min\{1, 2a^2\}$

Tableau de valeurs

a	$-\infty$ … $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ … 0	0 … $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ … 1	1 … $+\infty$
$\min\{a^2, a\}$	a	a	a^2	a^2	a
$\min\{2a-1, 1\}$	$2a-1$	$2a-1$	$2a-1$	$2a-1$	1
$\min\{1, 2a^2\}$	1	$2a^2$	$2a^2$	1	1
L2 prudente	non	non (oui en 0)	non	non	oui

L2 est prudente ssi $a \geq 1$ ou $a = 0$

La stratégie 1 de J2 est prudente ssi $\min\{1-2a, -a^2, -1\} \geqslant \min\{-1, -a, -2a^2\}$ ou de façon équivalente si $\max\{2a-1, a^2, 1\} \leqslant \max\{1, a, 2a^2\}$

tableau de valeurs... Ou bien $a^2 - (2a-1) = (a-1)^2 \geqslant 0$ donc $2a-1 \leqslant a^2 \leqslant 2a^2 \leqslant \max\{1, a, 2a^2\}$

et $1 \leqslant \max\{1, a, 2a^2\}$ donc $\max\{2a-1, a^2, 1\} \leqslant \max\{1, a, 2a^2\}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

La stratégie 1 de J2 est prudente $\forall a \in \mathbb{R}$

$(2,1)$ est un équilibre du jeu $\Leftrightarrow$ L2 n'est pas regrettée par J1 et C1 n'est pas regrettée par J2

$\Leftrightarrow a^2 \geqslant 2a-1, 1$ et $-a^2 \geqslant -a$

$\Leftrightarrow (a \leqslant -1$ ou $a \geqslant 1)$ et $a \in [0,1]$

$\Leftrightarrow a = 1$

3. $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{-1}{(x+y)^2} + 2y$. Or pour $x, y \geqslant \frac{1}{2}$ on a $(x+y)^2 \geqslant 1$ donc $\frac{-1}{(x+y)^2} \geqslant -1$ et $2y \geqslant 1$ donc $\frac{-1}{(x+y)^2} + 2y \geqslant 0$ avec égalité ssi $x = y = 1/2$. Donc pour tout $y \in [\frac{1}{2}, 2]$, $x \mapsto g(x,y)$ est strictement croissante donc tout $x \in [\frac{1}{2}, 2[$ est strict^t dominé par 2

$g(x,y)$ est symétrique en x, y donc $\forall x \in [\frac{1}{2}, 2]$, $y \mapsto g(x,y)$ est strict^t croissante donc tout $y \in]\frac{1}{2}, 2]$ est strict^t dominé par $1/2$

Clairement $(2, \frac{1}{2})$ est un équilibre du jeu puisque J1 ne regrette jamais 2 et J2 ne regrette jamais $\frac{1}{2}$. Comme le jeu est à somme nulle, l'existence d'un équilibre implique que le jeu admet une valeur et la valeur du jeu est le gain de J1 à l'équilibre donc vaut $g(2, \frac{1}{2}) = \frac{12}{5}$.