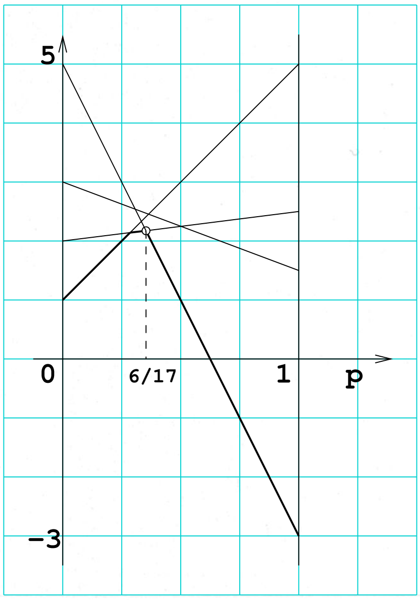
L2 Math - Théorie des jeux Corrigé de l'interrogation du 30 nov. 2012

1. $\begin{pmatrix} 5 & 5/2 & 3/2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

1a. $\underline{g} = \max\{-3, 1\} = 1$; $\bar{g} = \min\{5, 5/2, 3, 5\} = \frac{5}{2}$; $\bar{g} \neq \underline{g}$ donc pas d'équilibre (pour les stratégies pures)

1b. $p \in [0,1]$ maximisant $g(p) := \min\{5p + 1 - p, \frac{5}{2}p + 2(1-p), \frac{3}{2}p + 3(1-p), -3p + 5(1-p)\}$

dessin :



Sur le dessin $g(p) = 5p + 1 - p$ pour $p \in [0, p_1]$ avec p_1 tq $5p_1 + 1 - p_1 = \frac{5}{2}p_1 + 2(1-p_1)$ ie $p_1 = \frac{2}{7}$

$g(p) = \frac{5}{2}p + 2(1-p)$ pour $p \in [p_1, p_2]$ avec p_2 tq $\frac{5}{2}p_2 + 2(1-p_2) = -3p_2 + 5(1-p_2)$ ie $p_2 = \frac{6}{17}$

$g(p) = -3p + 5(1-p)$ pour $p \in [p_2, 1]$

Puis, toujours en regardant le dessin, $g(p)$ est maximal pour $p = p_2 = \frac{6}{17}$

Conclusion : $\left(\frac{6}{17}, \frac{11}{17}\right)$ est la seule stratégie mixte prudente de J1

Rq : Sans dessin on sait que $g(p)$ est maximal en l'un des points $p=0$, $p=1$ ou p donnant l'égalité entre 2 des 4 fonctions dont g est le min. On calcule les $C_4^2 = 6$ valeurs de p en question et on compare les 2+6 valeurs de $g(p)$: $p = 0 \rightsquigarrow g(p) = 1$; $p = \frac{2}{7} \rightsquigarrow g(p) = 15/7$; $p = 4/13 \rightsquigarrow g(p) = 28/13$
$p = \frac{1}{3} \rightsquigarrow g(p) = 13/6$; $p = \frac{6}{17} \rightsquigarrow g(p) = \frac{37}{17}$; $p = \frac{4}{11} \rightsquigarrow g(p) = \frac{23}{11}$; $p = \frac{1}{2} \rightsquigarrow g(p) = 1$; $p = 1 \rightsquigarrow g(p) = -3$
$\max\{1, \frac{15}{7}, \frac{28}{13}, \frac{13}{6}, 37/17, 23/11, 1, -3\} = \frac{37}{17}$ atteint pour $p = \frac{6}{17}$

1c Les équilibres de l'extension mixte du jeu sont les couples $\left(\left(\frac{6}{17}, \frac{11}{17}\right), (q_1, q_2, q_3, q_4)\right)$ avec (q_j) prudente pour J2. Un tel (q_j) est forcément une meilleure réponse de J2 à $\left(\frac{6}{17}, \frac{11}{17}\right)$ donc minimise $G\left(\left(\frac{6}{17}, \frac{11}{17}\right), (q_j)\right) = \left(5 \times \frac{6}{17} + 1 \times \frac{11}{17}\right) q_1 + \left(\frac{5}{2} \times \frac{6}{17} + 2 \times \frac{11}{17}\right) q_2 + \cdots$

$= \frac{41}{17} q_1 + \frac{37}{17} q_2 + \frac{42}{17} q_3 + \frac{37}{17} q_4$

Les coins de Δ_4 où cette fonction est minimale sont $(0,1,0,0)$ et $(0,0,0,1)$. Cette fonction est affine donc les pts de Δ_4 où elle est minimales sont l'enveloppe convexe des coins trouvés donc les points $(0, q, 0, 1-q)$ avec $q \in [0,1]$. Il reste à trouver les $q \in [0,1]$ tq $(0, q, 0, 1-q)$ soit prudente.

On connaît $\underline{G} = g\left(\frac{6}{17}\right)$ (avec les notations de 1a)
$= \frac{37}{17}$

et on sait $\bar{G} = \underline{G}$ donc on doit avoir $\frac{5}{2}q - 3(1-q) \leq \frac{37}{17}$ et $2q + 5(1-q) \leq \frac{37}{17}$ ce qui équivaut à $\frac{11}{2}q \leq \frac{88}{17}$ et $-3q \leq -\frac{48}{17}$ donc à $q = \frac{16}{17}$

Alternativement on cherche $q \in [0,1]$ minimisant $\max\{\frac{5}{2}q - 3(1-q), 2q + 5(1-q)\}$. Dessin $\rightsquigarrow$ q tq $\frac{5}{2}q - 3(1-q) = 2q + 5(1-q)$ donc $q = \frac{16}{17}$

Conclusion : le seul équilibre de l'extension mixte du jeu est $\left(\left(\frac{6}{17}, \frac{11}{17}\right), \left(0, \frac{16}{17}, 0, 1/17\right)\right)$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2a On voit tout de suite que $L_2 \leq L_1$ ie la stratégie 2 de J1 est dominée au sens large par la strat. 1

Une autre stratégie de J1 dominée ds l'extension mixte du jeu le sera dans le jeu obtenu en supprimant L2 ; on se ramène donc au jeu $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix}$.

L1 est dominée au sens large ds l'extension mixte du jeu $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix}$ ssi $\exists\ p_3, p_4 \geq 0$ avec $p_3 + p_4 = 1$ et $L_1 \leq p_3 L_3 + p_4 L_4$. Si tel est le cas

on a $2 \leq p_3 \times 4 + p_4 \times 6 \leq p_3 \times 6 + p_4 \times 6 = 6$ (1ère colonne)

$3 \leq p_3 \times 4 + p_4 \times 5 \leq 5$

$4 \leq p_3 \times 2 + p_4 \times 2 = 2$

$8 \leq p_3 \times 2 + p_4 \times 0 \leq 2$

ces deux inégalités sont fausses donc L_1 n'est pas dominée

De même si L_3 est dominée alors $4 \leq \max\{2,6\}$, $4 \leq \max\{3,5\}$, $2 \leq \max\{4,2\}$ et $2 \leq \max\{8,0\}$ ce qui n'entraine pas de contradiction.

De fait $L_3 \leq \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_4 = (4,4,3,4)$

Dans le nouveau jeu $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_4 \end{pmatrix}$, L_4 n'est pas dominée par L_1 ni l'inverse.

Conclusion : les strat. de J1 dominée au sens large ds l'extension mixte du jeu sont les strat. 2 et 3.

La stratégie 2 de J1 est strictement dominée ds l'extension mixte du jeu $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix}$ ssi elle l'est dans le jeu $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_4 \end{pmatrix}$. Si tel est le cas il existe $p_1, p_4 \geq 0$ avec $p_1 + p_4 = 1$ et $L_2 < p_1 L_1 + p_4 L_4$ mais alors $2 < p_1 \times 2 + p_4 \times 6 \leq 6$, $2 < p_1 \times 3 + p_4 \times 5 \leq 5$, $4 < p_1 \times 4 \times p_4 \times 2 \leq 4$, etc.

cette 3ème inégalité est impossible donc la strat. 2 n'est pas strict^t dominée.

La stratégie 3 est strict^t dominée : on a $L_3 = (4,4,2,2) < (\frac{1}{2} - \varepsilon) L_1 + (\frac{1}{2} + \varepsilon) L_4 = (4 + (6-2)\varepsilon, 4 + (5-3)\varepsilon, 3 + (2-4)\varepsilon, 4 + (0-8)\varepsilon)$

pour $\varepsilon > 0$ proche de 0, explicitement pour $0 < \varepsilon < \min\{\frac{1}{2}, \frac{2}{8}\} = \frac{1}{4}$

2b Après élimination des strat. 2 et 3 de J1 on obtient le jeu $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \geq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc la strat. 2 de J2 est dominée ds l'extension mixte du nouveau jeu

$\leadsto$ nouveau jeu $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Il n'existe pas $q_2, q_3 \geq 0$ avec $q_2 + q_3 = 1$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \geq q_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + q_3 \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $q_2 \times 4 + q_3 \times 8 \geq 4$

donc C_1 n'est pas dominée. De même $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dominée car $0 < \min\{6,2\}$

C_2 est dominée s'il existe $q \in [0,1]$ tq $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \geq q \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + (1-q) \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} -4 \geq -6q \\ 2 \geq 6q \end{cases}$ impossible

Conclusion : Aucune des 2 lignes ne domine l'autre dans le nouveau jeu, ce dernier est donc le jeu obtenu après élimination successive des strat. dominées au sens large des 2 joueurs.