

1. *Tic-tac-toe*

	o	x

C'est au tour de  $\times$  de jouer. Peut-il encore gagner ? Expliciter les stratégies gagnantes de  $\times$  ou  $o$ .

2. *Le jeu "pierre-papier-ciseaux"*

Deux enfants jouent à "pierre-papier-ciseaux" comme suit : Ils sont assis face à face autour d'une table. Chacun symbolise en cachette par la forme de la main droite soit la pierre (poing fermé), soit le papier (main ouverte avec les doigts joints), soit les ciseaux (main ouverte avec les doigts en forme de V). Ils frappent simultanément le dessus de la table avec leur main et marquent ainsi un point ou zéro suivant qu'ils remportent ou non la partie et ceci suivant la règle suivante : le papier l'emporte sur la pierre (la réduit en poussière...), la pierre l'emporte sur les ciseaux, les ciseaux l'emporte sur le papier.

Donner la forme normale de ce jeu. Le jeu admet-il un équilibre ?

3. *"pierre-papier-ciseaux" biaisé.*

On reprends le jeu de la première question. Comment peut-on modéliser ce jeu sous forme extensive ?

Le plus jeune enfant peine à faire un V avec sa main et laisse transparaître ce choix à son adversaire bien qu'il s'efforce de cacher son jeu. Modéliser cette situation par un jeu sous forme extensive. Le jeu est-il à information complète si le plus jeune enfant ne se rend pas compte qu'il ne cache pas bien son jeu ? Quelle est la forme normale du jeu ? Ce jeu admet-il des équilibres ? des stratégies dominées ?

4. *Variation sur le dilemme des prisonniers*

Deux malfaiteurs sont arrêtés pour un même forfait et interrogés séparément. Si l'un d'eux est dénoncé par son compagnon il encoure une peine de deux ans de prison. Celui qui dénonce son compagnon aura une remise de peine d'un an. Si personne n'est dénoncé, tous deux seront relâchés.

Quelles sont les stratégies de chacun des prisonniers ? Par quel gain peut-on modéliser l'issue des interrogatoires ? Quelle est alors la forme normale du "jeu" ? Quels sont les équilibres éventuels ? Les équilibres sont-ils tous prudents ?

5. Deux marchands se partagent une clientèle uniformément répartie sur une plage de longueur 1 en choisissant leurs positions, respectivement  $x$  et  $y$  dans  $[0, 1]$ , les clients allant au marchand le plus proche. Le gain de chacun des marchands est proportionnel à la part de clientèle captée, de sorte que la somme des gains des deux marchands est indépendante de  $x$  et de  $y$ . Si  $x = y$  les gains des deux marchands sont égaux.

Quelle est la forme normale du jeu ? Y a-t-il une meilleure réponse du marchand 2 si le marchand 1 choisit  $x < \frac{1}{2}$  ? Le jeu admet-il un équilibre ? Y a-t-il parmi les stratégies du marchand 1 des stratégies dominées ?

6. Deux marchands de glace se partagent une clientèle de 100 vacanciers (chaque vacancier achète exactement une glace). Les marchands ont les mêmes charges : 1 euro par glace vendue. Ils choisissent indépendamment leur prix de vente : soit 1 soit 2 soit 3 euros et font alors un bénéfice par glace vendue de 0 ou 1 ou 2 euros respectivement. Les vacanciers choisissent tous le marchand le moins cher. Si les deux marchands affichent le même prix, la moitié des vacanciers choisira le premier marchand, l'autre moitié le second.

a. Donner la forme normale du jeu.

b. Quelle est la meilleure réponse du second marchand si le premier choisit de vendre ses glaces 3 euros ? Qu'en est-il si le premier marchand choisit de vendre ses glaces 2 euros ?

c. Quels sont les équilibres du jeu ?

7. Pour les jeux suivants indiquer les stratégies (pures) prudentes de chaque joueur. Si chacun des joueurs jouent prudemment, regrettent-ils a posteriori leur choix de stratégie ?

$$\left( \begin{array}{cc} (3, 3) & (-1, 2) \\ (2, -1) & (0, 0) \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} (3, 3) & (-1, 2) \\ (2, 1) & (0, 0) \end{array} \right).$$

Les joueurs gagnent-ils à jouer prudemment ?

8. *Jeu extrait du film "la fureur de vivre"*

Deux jeunes irresponsables roulent en voiture à toute allure l'un vers l'autre jusqu'à ce que l'un des deux freine avant l'autre (ou pas). Leur "gain" à l'issue du jeu peut être quantifié comme suit : s'ils freinent en même temps, le gain est 2 pour chacun. Si l'un freine avant l'autre, son gain est 0 alors que l'autre gagne 4. Si aucun des deux ne freine c'est l'accident, le gain est -2 pour chacun.

Les équilibres du jeu sont ils prudents pour chacun des joueurs ?

9. Paul et Jacqueline vont chaque semaine indépendamment à l'un de leurs deux lieux habituels de distraction : l'opéra ou le stade. Paul a une préférence pour l'opéra, Jacqueline pour le stade. Paul, comme Jacqueline, note 0 sa satisfaction s'il ne se retrouve pas avec son amie, 1 s'il se retrouve avec son amie plus 1 s'il se trouve à son lieu préféré.

Donnez la forme matricielle du jeu.

Paul choisit de répartir sa fréquentation entre l'opéra et le stade comme suit : il choisit une fois pour toute un nombre  $p$  entre 0 et 1 puis décide de son lieu de sortie en tirant au hasard un nombre entre 0 et 1 (grâce à la touche **ran#** de sa calculatrice par exemple). Si ce nombre est plus petit que  $p$  il ira à l'opéra ; sinon il ira au stade. Jacqueline adopte la même procédure avec un nombre  $q \in [0, 1]$  choisi une fois pour toute par elle-même.

Quelles sont les satisfactions moyennes (après un grand nombre de semaines) de Paul et de Jacqueline en fonction de  $p$  et  $q$  ?

Quelle est la ou les meilleure(s) réponse(s) de Paul, en terme de choix de  $p$ , au choix par Jacqueline de  $q$  ? (*i.e.*  $q$  étant fixé, quels  $p$  donnent à Paul la meilleure satisfaction moyenne ?)

Quelle est la ou les meilleure(s) réponse(s) de Jacqueline au choix par Paul de  $p$  ?

Représentez sur un même dessin les ensembles  $\{(p, \text{meilleure réponse à } p), p \in [0, 1]\}$  et  $\{(\text{meilleure réponse à } q, q), q \in [0, 1]\}$ . En déduire les équilibres du jeu.

Le ou les équilibres procurent ils à Paul et Jacqueline une satisfaction optimale ?

10. Construire un jeu à deux joueurs, chaque joueur ayant 3 stratégies, admettant un équilibre mais tel que le jeu obtenu en supprimant les stratégies dominées n'admette pas d'équilibre.