

Durée : une heure – appareils électroniques et documents interdits

Sujet —

Justifier correctement chaque réponse.

1. Soit le jeu à deux joueurs à somme nulle de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & -4 & -2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

De combien de stratégies disposent les joueurs 1 et 2 ? Quel est le gain du joueur 1 s'il joue la stratégie 3 et si le joueur 2 joue la stratégie 4 ? Quel est le gain du joueur 2 pour ce même couple de stratégies ?

Indiquer pour chaque stratégie du joueur 2 les meilleures réponses du joueur 1 et pour chacune de ces meilleures réponses les meilleures réponses du joueur 2. Qu'en déduit on en terme d'équilibre du jeu ?

2. On considère le jeu à deux joueurs de matrice de paiement suivante (on indique en ligne i colonne j le couple (gain de J1, gain de J2) relatif au choix par J1 de sa stratégie i et au choix par J2 de sa stratégie j) :

$$\begin{pmatrix} (2a - 1, 1 - 2a) & (1, -1) \\ (a^2, -a^2) & (a, -a) \\ (1, -1) & (2a^2, -2a^2) \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Le jeu est-il à somme nulle ?

Les équilibres du jeu sont-ils toujours prudents pour chacun des joueurs ?

Pour quelles valeurs de a la stratégie 1 du joueur 1 est-elle strictement dominée ?

Pour quelles valeurs de a la stratégie 2 du joueur 1 est-elle prudente ?

Pour quelles valeurs de a la stratégie 1 du joueur 2 est-elle prudente ?

Pour quelles valeurs de a le couple de stratégie (2, 1) est-il un équilibre du jeu ?

3. On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle donné par $X = Y = [\frac{1}{2}, 2]$; $g(x, y) = \frac{1}{x+y} + 2xy$ (gain du joueur 1).

Quelles sont les stratégies strictement dominées des joueurs 1 et 2 ?

Le jeu admet-il une valeur ? Si oui que vaut-elle ?