L2 MASS - option Théorie des jeux **Examen** **15 janvier 2013**

Durée : 2h – calculatrice et documents interdits

Justifier correctement chaque réponse.

1. *Stratégies regrettées* — On considère un jeu à deux joueurs à somme nulle. On connaît le gain garanti optimal $\underline{g}$ du joueur 1 et la majoration optimale de la perte $\overline{g}$ du joueur 2 : $\underline{g} = -2$ et $\overline{g} = 0$. Les joueurs ont choisi leurs stratégies et le joueur 1 obtient le gain -3 à l'issue du jeu. Peut on conclure pour le joueur 1 et pour le joueur 2 qu'il regrette ou ne regrette pas son choix ? Expliquez (seule l'explication est notée).

Qu'en est il si le joueur 1 obtient le gain -2 ?

2. On considère le jeu matriciel $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

a. Montrer que la stratégie 2 du joueur 2 est dominée au sens large dans l'extension mixte du jeu.

b. Montrer que la stratégie mixte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ du joueur 1 est prudente.

c. Montrer que la stratégie pure 2 du joueur 2 est prudente dans l'extension mixte du jeu. Est elle prudente pour le jeu initial ?

d. Quelles sont les autres stratégies mixtes prudentes du joueur 2 ?

3. On considère la partie $\triangle = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$ du plan et les points $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$, $D = (\frac{1}{2}, 0)$ et $E = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. f est l'application de $\triangle$ dans $\mathbb{R}$ donnée par : f est affine sur chacun des triangles pleins ABE, AED et CDE ; $f(A) = f(E) = f(C) = 1$; $f(B) = f(D) = 0$.

a. Quels sont les points de $\triangle$ où f est maximale ? Expliquez.

b. L'application f est elle concave sur $\triangle$?

4. *Le jeu Civilisation* — Le joueur A possède une ville et deux unités pour la défendre. Il sait que le joueur B va lancer son unique armée à la conquête de sa ville par l'une des deux routes qui y conduisent : la route 1 ou la route 2.

Le joueur B a besoin de deux tours de jeu pour atteindre la ville de A, indépendamment de la route qu'il choisit ; lors du premier tour il choisit la route empruntée par son armée. Le joueur A ne verra pas ce choix.

Pour défendre sa ville, le joueur A peut lors du premier tour placer chacune de ses deux unités au choix sur la route 1 ou sur la route 2 ou dans la ville.

A l'issue du premier tour, si une ou les deux unités du joueur A se trouve sur la même route que l'armée du joueur B, une bataille se produit dont l'issue est : l'armée de B est détruite avec probabilité $\frac{1}{2}$ si elle fait face à une seule unité de A, avec proba $\frac{2}{3}$ si elle fait face aux deux unités de A.

Si la bataille a lieu, le joueur A en est prévenu et peut déplacer une unité présente dans la ville sur la route où a lieu la bataille ou bien la laisser dans la ville. Il ne peut pas par contre déplacer l'unité éventuellement présente sur l'autre route. S'il déplace l'unité présente dans la ville vers le lieu de bataille et si l'armée de B est sortie victorieuse de la bataille, une nouvelle bataille a lieu dont l'issue obéit à la même règle que pour la première.

Au second tour, le joueur A ne peut plus déplacer ses unités. Si l'armée de B existe toujours, elle attaque la ville et l'emporte avec probabilité 1 s'il n'y a pas d'unité de A dans la ville, avec probabilité $\frac{3}{4}$ si la ville est défendue par une seule unité ; avec probabilité $\frac{2}{3}$ si la ville est défendue par deux unités.

Le gain du joueur B est 1 s'il emporte la ville, -1 sinon, et le jeu est à somme nulle. Comme l'issue des éventuelles batailles est aléatoire, on retient comme gain du joueur B l'espérance du gain.

a. Dessiner l'arbre du jeu en faisant jouer A en premier.

b. Quelles sont les stratégies de A et de B ?

c. Quelle est la forme normale du jeu ?

d. Le jeu admet il un équilibre en stratégie pure ?