L3 MATH - algèbre effective feuille 1 5-12 septembre 2016

Récurrence, relation de bezout, algorithmes associés

Récurrence, partie de $\mathbb{N}$, fonction récursive

Ex. 1. Soit (u_n) une suite d'éléments d'un ensemble E donnée par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n$. Montrer que la suite (u_n) est constante.

Ex. 2. a. Montrer que toute suite décroissante (au sens large) de $\mathbb{N}$ est stationnaire. Pouvez vous écrire un algorithme pour trouver la limite ?

b. Montrer que toute suite croissante majorée de $\mathbb{Z}$ converge.

3. Soit E une partie non vide de $\mathbb{N}$. Montrer que E admet un plus petit élément.

Concrètement on donne E soit comme l'image d'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (une paramétrisation), soit par sa fonction caractéristique $g : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ (qui permet de tester si un entier donné appartient à E). Dans le second cas on donne de plus un entier e tel que $g(e) = 1$.

a. Dans les deux cas écrire un algorithme qui teste si e est le plus petit élément de E.

b. Ecrire un algorithme qui détermine le plus petit élément de E. Cet algorithme s'arrête t-il en un nombre fini d'étapes ? Si oui, prouver le ; obtenez vous un majorant du nombre d'étapes ? si non, donner un exemple d'exécution ne s'arrêtant pas.

c. Il n'est pas évident qu'on puisse écrire la fonction caractéristique f sous forme d'un algorithme qui donne une réponse en un temps fini. Qu'en est il pour E égal à l'ensemble des entiers positifs qui s'écrivent comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de 5 et 8 ? Qu'en est il pour E l'ensemble des entiers plus grand que 100 qui s'écrivent comme produit de deux nombres premiers ?

Division euclidienne, pgcd, équation diophantienne

4. Soient $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$.

a. Montrer qu'il existe un unique entier r vérifiant $0 \leq r < b$ et $b \mid (a - r)$. Algorithme pour calculer r ? Généralisation à $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$?

b. Montrer que le plus petit sous groupe de $\mathbb{Z}$ contenant a et b est le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ $\{ak + bl,\ k, l \in \mathbb{Z}\}$. (On le note $< a, b >$ et on l'appelle le sous-groupe engendré par a et b.) Donner la liste des entiers $13k + 19l$ pour $-10 \leq k, l \leq 10$.

c. Soit d le plus petit entier strictement positif de $< a, b >$ (existence ?). Montrer que $< a, b >= d\mathbb{Z}$. Pouvez vous extraire de votre preuve un algorithme pour calculer d ?

d. Montrer $< a, b >=< b, r >$. En déduire l'existence d'un $d \geq 0$ tel que $< a, b >= d\mathbb{Z}$. Algorithme pour calculer d ? Peut on expliciter des entiers k, l tels que $d = ak + bl$ (relation de Bezout) ? Exemple avec $a = 13,\ b = 19$; $a = 132,\ b = 105$.

5. Soit A un sous-groupe de $\mathbb{Z}$; montrer qu'il existe un entier d tel que $A = d\mathbb{Z}$. Algorithme lorsque A est donné comme $< a_1, \ldots, a_n >$? Exemple avec $< 12, 30, 20 >$

6. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ $456x + 123y = 3$; $456x + 123y = 5$. Algorithme naïf ? Comparer avec la résolution dans $\mathbb{Q}$.

7. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ $12x + 30y + 20z = 0$, $12x + 30y + 20z = 10$