ex1

[e for e in u if e != 0]

[[i,j] for i in [0..len(u)-1] for j in [i+1..len(u)-1] if u[i] > u[j]]

[d for d in [1..abs(a)] if a%d == 0]

[d for d in [1..abs(a)] if a%d == 0 and b%d == 0]) cf feuille TP4

ex2a relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}^*$ est un bon ordre : toute suite strict^t décroissante est finie
n'est pas total.

pour $n : \mathbb{Z}^*$ n pair $\Rightarrow$ $n/2 \in \mathbb{Z}^*$ et $n/2 \preccurlyeq n$ $\prec$ est une "relation bien fondée"

récurrence sur n relativ^t à ce bon ordre : $f(n)$ rend $2^{v_2(n)}$ où $v_2(n)$ vérifie $n = 2^{v_2(n)} \times m$ avec m impair

ou bien récurrence habituelle sur $v_2(n)$ mais preuve d'existence de $v_2(n)$?

n impair ok

$0 \neq n$ pair alors $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}^*$ et $n/2 \preccurlyeq n$. par HR $f(\frac{n}{2})$ rend $2^{v_2(n/2)}$

donc $f(n)$ rend $2^{v_2(n/2)+1} = 2^{v_2(n)}$ en particulier $f(n)$ termine

$f(0)$ ne termine pas !

Rq on n'a pas $\frac{n}{2} \leq n$ pour l'ordre habituel mais on a $|\frac{n}{2}| < |n|$ ds $\mathbb{N}$ et $(\mathbb{N}, <)$ est bien ordonné

2b récurrence habituelle sur $k+l$ avec $k, l \in \mathbb{N}$ $((\mathbb{N}, <)$ est bien ordonné$)$ | ou bien récurrence sur k pour $l \geq 0$

Si $l = 0$ ou $k < l$ $g(k,l)$ termine

sinon $k-1, l, l-1 \in \mathbb{N}$ car $k \geq l > 0$

$k-1+l,\ k-1+l-1 < k+l$ par HR $g(k-1,l),\ g(k-1,l-1)$ termine donc $g(k,l)$ aussi

Par la m^e récurrence on montre $g(k,l) = \binom{k}{l}$ cf triangle de Pascal

3a On sait $a_1\mathbb{Z} + \dots + a_n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ où $d = \mathrm{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$

$\mathrm{pgcd}(12, 15, 21) = \mathrm{pgcd}(3\times4, 3\times5, 3\times7) = 3$

$\mathrm{pgcd}(18, 39, 24) = \mathrm{pgcd}(9\times2, 3\times13, 3\times8) = 3$ on a donc égalité

3b $12\mathbb{Z} + 30\mathbb{Z} + 45\mathbb{Z} + 54\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ avec $d = \mathrm{pgcd}(12, 30, 45, 54) = \mathrm{pgcd}(3\times4, 3\times2\times5, 9\times5^2, 27\times2) = 3$

$3\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \{3\times k,\ k \in \mathbb{N}\} = \{0, 3, 6, \dots\}$ ⇝ plus petit entier >0 est 3, le suivant est 6

4 $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 - C_2 \to C_1} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_2 \to L_1} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - 3L_1 \to L_2} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 - 9C_1 \to C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$

$P\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$ où P est la transf. de I_2 par les op. sur les lignes
Q col

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_2 \to L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - 3L_1 \to L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = P$

* Si $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ était surjective, $P\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}Q$ le serait aussi puisque P, Q sont inversibles or $(0,1) \notin \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 - C_2 \to C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 - 9C_1 \to C_2} \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} = Q$

$f : (x,y) \mapsto (4x+6y, 6x+3y)$ est une appl linéaire $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ relativt aux bases canoniques

Soit $\varphi : \mathbb{Z}^2 \circlearrowleft$ de matrice P $\qquad$ $\varphi \circ f \circ \psi$ est de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$, elle est injective, $(x, -24y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$\psi : \mathbb{Z}^2 \circlearrowleft$ de matrice Q $\qquad$ car de noyau nul

elle n'est pas surjective : $(0,1)$ n'est pas de la forme $(x, -24y)$ pour $x, y \in \mathbb{Z}$

Il en est de m̂ pour f puisque φ et ψ sont des isomorphismes (les matrices P, Q sont inversibles)

5 $\quad f : (x,y,z) \mapsto (x+ky, x+\ell z)$ est de matrice $\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & \ell \end{pmatrix}$, Soit $\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ avec $d_1 \mid d_2$ la forme de Smith de cette matrice. f est surjective $\Leftrightarrow$ g de matrice $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix}$ est surjective (m̂ arg. qu'en 4)

Or $(1,0) \in \operatorname{Im} g \Leftrightarrow d_1 = \pm 1$, $\quad (0,1) \in \operatorname{Im} g \Leftrightarrow d_2 = \pm 1$

On calcule d_1, d_2 en fonction de k, ℓ

Pour $k = 3, \ell = 4$: $\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ok

Pour k, ℓ qcq $\quad \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & \ell \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & -k & \ell \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k & \ell \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow d_1 = 1, \; d_2 = \operatorname{pgcd}(-k, \ell)$

concl. f surj. $\Leftrightarrow k \wedge \ell = 1$

6a $\quad (e_i)$ est libre $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} M = 0 \qquad$ or $\operatorname{Ker} M \overset{\text{via } \psi \text{ de matrice } Q}{\simeq} \{(x,y,z) \mid x = 0 \text{ et } 2y = 0 \text{ et } 4z = 0\}$ ok

$\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker} N$ où N est la forme de Smith de M

6b $\quad$ On écrit $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \\ \nu' \end{pmatrix}$ où $PMQ = N$

$M \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$ à coef entier $\Leftrightarrow$ $PM \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$ à coef entier $\Leftrightarrow$ $N \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \\ \nu' \end{pmatrix}$ à coef. entier $\Leftrightarrow$ $\lambda' \in \mathbb{Z}, \; 2\mu' \in \mathbb{Z}, \; 4\nu' \in \mathbb{Z}$

On observe $Q \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \\ \nu' \end{pmatrix}$ à coef. entiers $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \\ \nu' \end{pmatrix}$ à coef. entier car $Q \in GL_3(\mathbb{Z})$ $\qquad$ donc $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient

$4\, Q \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu''/2 \\ \nu''/4 \end{pmatrix}$ est à coef. entiers si λ', μ'', ν'' sont entiers donc les dénominateurs divisent 4

$2Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ n'est pas à coef. entiers $\quad$: on peut avoir 4 au dénom.

6c $\quad (\lambda, \mu, \nu)$ comme précédemment. $\quad f : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}$ nulle en e_1, e_2, e_3 est également nulle en $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$ (il suffit de voir f comme une appl. linéaire $\mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}$) Mais $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$ n'est pas combinaison à coef. entier de e_1, e_2, e_3 par unicité de l'écriture si (e_1, e_2, e_3) est une base sur $\mathbb{Q}$

Le noyau d'une appl. linéaire $f : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}/4$ est de rang 4 : $4\mathbb{Z}^4 \subset \operatorname{Ker} f$ donc non.