L3 alg. eff.   Corrigé de l'interrogation du 7 octobre 2017

Q. $<$ relation sur E est bien fondée s'il n'existe pas de suite (x_n) d'él^ts de E tq $\forall n,\ x_{n+1} < x_n$

exemple $(\mathbb{N},<)$

contre exemple $(\mathbb{Z},<)$ ou bien $(\{0\},=)$

Ex 1. La définition de f fait appel à f ce qui indique une définition récursive.

On cherche $<$ sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ et g tq $f(x,y) = g\left((x,y), (f(a,b))_{(a,b)<(x,y)}\right)$

Rq la famille $(f(a,b))_{(a,b)<(x,y)}$ est la restriction de l'application f à l'ensemble $\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ (a,b)<(x,y)\}$

On doit avoir
$$g\left((x,y), f|_{\{(a,b),\ (a,b)<(x,y)\}}\right) = (0,|y|) \text{ si } x=0$$
$$= f(y,x) \text{ si } |x|>|y|$$
$$= f(x,|y|-|x|) \text{ si } 0<|x|\leq|y|$$

$f(y,x)$ et $f(x,|y|-|x|)$ s'expriment en terme de (x,y) et de la restriction de f à $\{(a,b),\ (a,b)<(x,y)\}$ pourvu que $(y,x)<(x,y)$ si $|x|>|y|$ et que $(x,|y|-|x|)<(x,y)$ si $0<|x|\leq|y|$

On pose $(a,b)<(c,d)$ dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ si $|a|<|c|$ ou si $|a|=|c|$ et $|b|<|d|$

Relation bien fondée ? Supposons $((a_n,b_n))_n$ est une suite vérifiant $\forall n\ (a_{n+1},b_{n+1})<(a_n,b_n)$

alors $(|a_n|)_n$ est une suite décroissante au sens large dans $\mathbb{N}$ donc est constante à partir d'un rang n_0.

A partir du rang n_0, $(|b_n|)$ est une suite décroissante au sens large ds $\mathbb{N}$ donc est constante à partir d'un rang n_1

Mais alors $(|a_{n_1+1}|,|b_{n_1+1}|)=(|a_{n_1}|,|b_{n_1}|)$ en contradiction avec $(a_{n_1+1},b_{n_1+1})<(a_{n_1},b_{n_1})$

$$f(12,30) = f(12,\underbrace{30-12}_{18}) = f(12,\underbrace{18-12}_{6}) = f(6,12) = f(6,\underbrace{12-6}_{6}) = f(6,\underbrace{6-6}_{0}) = f(0,6) = (0,6)$$

Rq f est à valeurs ds $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ et non $\mathbb{Z}$.

Ex 2. t fixé $24x+18y+12z=-15t$ admet une solution ssi $\underbrace{\mathrm{pgcd}(24,18,12)}_{=6}$ divise $-15t$ donc si 2 divise t.

On cherche une relation de Bezout pour $(24,18,12)$ ou encore pour $\left(\frac{24}{6},\frac{18}{6},\frac{12}{6}\right)=(4,3,2)$. $4\times1+3\times(-1)=1$ convient. Alors $24\times1+18\times(-1)=6$ puis $24\times(-5)+18\times5=6\times(-5)=-30=-15\times2$

$(-5,5,0,2)$ est solution de $(*)$

Si (x,y,z,t) est solution de $(*)$ alors $(x,y,z,t)-\frac{t}{2}(-5,5,0,2)=\left(x+5\frac{t}{2},\ y-5\frac{t}{2},\ z,\ 0\right)$ également et inversement. Les 2 vecteurs $(-5,5,0,2)$ et $(x_1,y_1,z_1,0)$ sont échelonnés donc ne peuvent être liés.

On résoud $24x_1+18y_1+12z_1=0 \iff 4x_1+3y_1=-2z_1$. $4\times1+3\times(-1)=1$ est une relation de Bezout donc pour tout $z_1\in\mathbb{Z}$ $4\times(-2z_1)+3(2z_1)=-2z_1$. (x_1,y_1,z_1) est solution ssi $(x_1,y_1,z_1)-(-2z_1,2z_1,z_1)=(x_1-2z_1,y_1+2z_1,0)$ est solution. On cherche maintenant les (x_2,y_2) tq $4x_2+3y_2=0$ ce qui équivaut à 4 divise y_2 et $x_2=-3\frac{y_2}{4}$

Conclusion $(x,y,z,t)\in\mathbb{Z}^4$ est solution de $(*)$ ssi $(x,y,z,t)=t'(-5,5,0,2)+z_1(-2,2,1,0)+y_2'(-3,4,0,0)$ avec $t',z_1,y_2'\in\mathbb{Z}$. L'écriture est unique car les trois vecteurs $(-5,5,0,2)$, $(-2,2,1,0)$, $(-3,4,0,0)$ sont échelonnés. Ils forment ainsi une base du $\mathbb{Z}$-module des solutions de $(*)$

Ex 3. On cherche les opérations sur les colonnes transformant $(24, 18, 24, 15)$ en $(d, 0, 0, 0)$

$$(24\ 18\ 24\ 15) \xrightarrow[C_2 - C_4 \to C_2]{} (24\ 3\ 24\ 15) \xrightarrow[\substack{C_1 - 8C_2 \to C_1 \\ C_3 - 8C_2 \to C_3 \\ C_4 - 5C_2 \to C_4}]{} (0\ 3\ 0\ 0) \xrightarrow[C_1 \leftrightarrow C_2]{} (3\ 0\ 0\ 0)$$

P = transformée de I_4 par ces mêmes opérations convient

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & 8 & 6 \end{pmatrix} = P$$

$$(24\ 18\ 24\ 15)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff (3\ 0\ 0\ 0)\,\underbrace{P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}} = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \text{ avec } 3x' = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y'\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{avec } y', z', t' \in \mathbb{Z}$$

Les trois vecteurs $(1, -8, 0, 8)$, $(0, -8, 1, 8)$, $(0, -5, 0, 6)$ sont linéairement indépendants car ils forment trois colonnes de P qui est inversible. Ils forment une base de l'espace des solutions de l'équation.

(x, y, z, t) est solution de $24x + 18y + 24z + 15t = 0$ ssi $(x, y, 2z, t)$ est solution de l'éq $(*)$ de l'ex 2, donc s'il existe $t', z_1, y_2' \in \mathbb{Z}$ tq $(x, y, 2z, t) = t'(-5, 5, 0, 2) + z_1(-2, 2, 1, 0) + y_2'(-3, 4, 0, 0)$

nécessairement 2 divise z_1 et $(x, y, z, t) = t'(-5, 5, 0, 2) + z_1(-2, 2, \frac{1}{2}, 0) + y_2'(-3, 4, 0, 0)$