L3 alg eff   corrigé de l'interrogation du 7 nov. 2016

1a diviseurs de 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 (au signe près)

18 : 1, 2, 3, 6, 9, 18 (—)

diviseurs communs : 1, 2, 3, 6 (au signe près)

Algorithme pour la liste des diviseurs d'un entier $a \geq 0$ avec les opérations et relations élémentaires sur $\mathbb{Z}$, y compris $a\%b$, (reste de la division euclidienne)

def d(a):
  Si $a = 0$ rendre $\mathbb{N}$
  Sinon rendre [i for i in [1..a] if a%i == 0]   # syntaxe python

Algorithme pour la liste des diviseurs communs de deux entiers $a, b \geq 0$

def dc(a,b):
  Si $a=0$ ou $b=0$ rendre d(a+b)
  Sinon rendre dc(b, a%b)

Ou plus simplement :
  [i for i in d(a) if i in d(b)]   # syntaxe python, boucle infinie si $a=0$!

Cf TP4

1b On observe 3 divise 24, 18, 12, 21 et $24 \times 1 + 21 \times (-1) = 3$ donc $3 = \mathrm{pgcd}(24, 18, 12, 21)$ et on vient d'exhiber une relation de Bezout

Voir également le TD-TP2

1c $(24 \times 1 + 21 \times (-1)) \times 5 = 3 \times 5 = 15$ donc $(x, y, z, t) = (5, 0, 0, -5)$ convient

$(0, y, z, 0)$ est solution si $18y + 12z = 15$ Mais comme 6 divise 18 et 12 on aurait 6 divise 15 ce qui n'est pas.

$(0, 0, z, t)$ est solution si $12z + 21t = 15$ ce qui équivaut à $4z + 7t = 5$

Or $4 \times 2 + 7 \times (-1) = 1$ donc $4 \times 2 \times 5 + 7 \times (-1) \times 5 = 5$: $(z, t) = (10, -5)$ convient

2a $(a_1\ a_2\ a_3\ a_4)\ \underbrace{E_{i,j}}_{\substack{\text{matrice } 4\times 4\\ \text{avec 1 en ligne } i \text{ col. } j\\ 0 \text{ ailleurs}}} = (0 - \underset{\substack{\uparrow\\ \text{en col. } j}}{a_i} - 0)$ donc $(a\ b\ c\ d)\left(I_4 - E_{3,4}\right) = (a\ b\ c\ d-c)$

et $(a\ b\ c\ d)\left(E_{3,1} + E_{1,2} + E_{2,3} + E_{4,4}\right) = (c\ a\ b\ d)$

Autre méthode : on effectue la même opération sur la matrice unité. cf 2b ci-dessous.

2b On fait une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes. Chaque opération correspond à la multiplication à droite par une matrice P. En particulier $P = I.P$ est la transformation de la matrice unité I par cette même opération.

$$(24\ 18\ 12\ 21) \xrightarrow{C_1 - C_4 \to C_1} (3\ 18\ 12\ 21) \xrightarrow{C_2 - 6C_1 \to C_2} (3\ 0\ 12\ 21) \xrightarrow{C_3 - 4C_1 \to C_3} (3\ 0\ 0\ 21) \xrightarrow{C_4 - 7C_1 \to C_4} (3\ 0\ 0\ 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} = P$$

$(24\ 18\ 12\ 21)\, P = (3\ 0\ 0\ 0)$

2c $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4,\ 3x = 0\} = \{(0, y, z, t),\ y, z, t \in \mathbb{Z}\} = \langle (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$

On peut écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$ puisque P est inversible. Alors $(24\ 18\ 12\ 21)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (24\ 18\ 12\ 21)\, P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = (3\ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$

donc $\{(x,y,z,t) \text{ tq } 24x+18y+12z+21t=0\}$ est l'image par P (l'application linéaire $\mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^4$ de matrice P dans la base canonique de $\mathbb{Z}^4$) de $\{(x',y',z',t'),\ 3x'=0\} = \langle (0,1,0,0), \dots, (0,0,0,1) \rangle$ donc est engendré par $P\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ = 2ème col. de P, $P\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. Puisque P est inversible l'image par P d'une famille libre est libre.

Conclusion $(-6,1,0,6)$, $(-4,1,0,4)$, $(-7,0,0,8)$ est une base de $\ker P$