L3 Algèbre effective examen 19 décembre 2017

Durée : 2H. Tout document et appareil électronique interdit
Justifier chaque réponse

Q1. Soient $d, a_1, \dots, a_n$ des entiers. A quelle condition sur d dit on que d est le pgcd de $a_1, \dots, a_n$? (Donner la condition sous la forme d'un énoncé formalisé).
Le pgcd tel que défini par votre énoncé existe t-il quelque soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$?

Q2. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$. Que signifie "$M$ est inversible dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$" ?

Ex 3. a. Soit $<$ une relation sur un ensemble E. On suppose qu'il existe une application strictement croissante $f : E \to \mathbb{N}$. Montrer que $<$ est bien fondée sur E.
b. On pose $E = \mathbb{N}^2$ et on définit $<$ sur E par $(x_1, x_2) < (y_1, y_2)$ si $x_2 < y_2$ ou si $(x_2 = y_2$ et $x_1 < y_1)$.
Montrer que la relation $<$ sur E est bien fondée.
Existe t-il une application strictement croissante $f : E \to \mathbb{N}$?
c. On définit la famille d'entiers $(u_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ par les relations
$u_{n,k} = \binom{n}{k} u_{n-k,0}$ si $k \leq n$, $u_{n,k} = 0$ sinon ($\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial)
$u_{n,0} = n! - \sum_{k=1}^{n} u_{n,k}$ (une somme indexée par l'ensemble vide vaut 0 ; $0!$ vaut 1).
Expliciter une relation bien fondée $<$ sur $\cancel{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ telle que la famille $(u_{n,k})$ soit définie récursivement NxN
relativement à cette relation. (Prouver que cette relation est bien fondée.)
Montrer par récurrence relativement à $<$ qu'on a pour tout (n, k) : $0 \leq u_{n,k} \leq n!$

Ex4. On note D l'ensemble des listes l telles que pour tout index i l[i] est de la forme [i,j] ou [i,j,a] avec i,j,a entiers. On définit en Python la fonction f dont l'argument l sera toujours un élément de D par les instructions ci-dessous.
La définition de f est elle récursive ? Si oui, relativement à quelle relation bien fondée sur les éléments de D ? (Justifier.)
On pose l=[[4,2,1],[5,6],[1,3,-1],[2,1,-1],[2,1],[5,2,1],[4,5,2]] ; Que vaut f(l) ?
Montrer par récurrence sur l dans D qu'on a f(f(l))=l pour tout l.

```python
def f(l):
    if l==[]:return(l)
    elif len(l[0])==2:return(f(l[1:])+[l[0]])
    else:return(f(l[1:])+[[l[0][1],l[0][0],l[0][2]]])
```

Ex 5. Dans ce qui suit n est un entier strictement positif fixé.
a. Soit Q la transformée de la matrice unité I_n par l'opération sur les lignes $L_i + aL_j \to L_i$ (où $1 \leq i, j \leq n$ et $a \in \mathbb{Z}$). A quelle opération sur les lignes où colonnes de $M \in \mathrm{M}_n Z$ correspond le produit MQ ?
b. Soit Q la transformée de la matrice I_6 par la suite d'opérations $L_2 + 3L_1 \to L_2$, $L_4 - L_5 \to L_4$, $L_5 - 2L_4 \to L_5$, $L_2 \leftrightarrow L_5$, $L_6 - L_2 \to L_6$, $L_2 \leftrightarrow L_3$.
Calculer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Q$

Ex 6. On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver $P, Q \in (GL)_2(\mathbb{Z})$ tel que $PMQ = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ avec d_1 divise d_2

Ex 7. On pose $u = (4, 2, 2, -3, -1)$, $v = (-1, 1, -5, 3, 4)$, $w = (2, 4, -8, 3, 7)$.
Soit E le sous $\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z}^5$ engendré par u, v, w. Donner une base de E. Peut on compléter cette base en une base de $\mathbb{Z}^5$?
Soit $F_{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficient dans $\mathbb{Q}$ de u, v, w et soit F l'intersection de $F_{\mathbb{Q}}$ avec $\mathbb{Z}^5$. Donner une $\mathbb{Z}$-base de F. Donner les coordonnées du vecteur $\cancel{(1, -1, -11, 6, 9)}$ dans cette base.
(1,1,-1,0,1)
Le vecteur $\cancel{(1, -1, -11, 6, 9)}$ est il combinaison linéaire à coefficient entier de u, v, w ?
(1,1,-1,0,1)