L3 Algèbre effective — examen — 8 janvier 2019

Durée : 2H. Tout document et appareil électronique interdit

Justifier chaque réponse

Q. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$. Que signifie "$M$ est inversible dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$" ?

Ex. On définit une fonction h par le script ci-dessous

In [1]:

```
def h(l):
    if l==[]:return(0)
    elif len(l)==1:return(abs(l[0]))
    elif 0 in l:return(h([x for x in l if x<>0]))
    else:
        if abs(l[0]) >= abs(l[1]):return(h([abs(l[0])-abs(l[1])]+l[1:]))
        else:return(h([l[0],abs(l[0])-abs(l[1])]+l[2:]))
# l[n:] désigne [l[n],l[n+1],...]
```

a. Calculer $h([2,6])$. Quel type d'objet prend h en argument ? Quel type d'objet rend h ? Quel est le domaine de définition de h (quels sont les l tels que $h(l)$ rend quelque chose) ?

b. Pour quelle relation bien fondée la définition de h est elle récursive ? Justifier.

c. Que calcule h ?

Ex. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 5 & 11 & 21 \end{pmatrix}.$$

a. Donner la liste (dans l'ordre) des opérations sur les lignes et les colonnes qui transforme A en sa forme de Smith sur $\mathbb{Z}$.

b. En déduire une base de l'image de A (vu comme $\mathbb{Z}$-module).

c. Donner un système d'équations linéaires (éventuellement modulaires) de l'image de A.

Ex. On considère le polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{F}_3[X]$.

a. Expliciter une base du $\mathbb{F}_3$-espace vectoriel $\mathbb{F}_3[X]/(P)$ et la matrice de l'endomorphisme $\varphi : y \mapsto y^3$ dans cette base.

b. Donner une base du noyau de $\varphi - \mathrm{id}$. Que dit cette base sur l'irréductibilité de P ?

c. Quelles sont les racines de P dans $\mathbb{F}_3$?

En déduire les facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{F}_3[X]$ puis, avec une relation de Bezout, un isomorphisme explicite d'un produit de corps finis de la forme $\mathbb{F}_3[X]/(Q)$ dans $\mathbb{F}_3[X]/(P)$.

Avec cet isomorphisme retouver une base de $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id})$.